

Vektoranalysis in Dirac–Notation

Ein Vorschlag zur Reformierung der Vektoranalysis — Dritte Fassung, Version 3.1

Stefan Pudritzki
Göttingen

10. März 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Voraussetzungen	5
1.1	Erforderliches Wissen	5
1.2	Verweis zu einem anderen Aufsatz	5
1.2.1	Differentiell superkontinuierliche Funktionen	5
1.3	Versionsnummer dieses Aufsatzes	6
1.4	Dreidimensionaler Raum	6
1.5	Logische Grundfunktionen	7
1.5.1	UND	7
1.5.2	ODER	7
2	Quantorenlogik	9
2.1	Praktikable Modifikation des TNT-Systems: Das SP-TNT-System	9
2.1.1	Quantoren	9
2.1.2	Funktionen als quantifizierbare Variablen	9
2.1.3	Import der TNT-Regeln	10
2.1.4	Farbige mathematische Sätze	11
2.1.5	Beweisführung	11
2.1.6	Zeichenvorrat	17
2.1.7	Mengensymbole	18
2.1.8	Bedeutungslosigkeit der nackten Symbole	18
2.1.9	Mengen	19
2.1.10	Widerspruchsfreie Mengenzugehörigkeiten	24
2.1.11	Induktionsbeweise	26
2.1.12	Konstanten	32

2.1.13	Funktionen	33
2.1.14	Folgen	34
3	Globale Symbole	35
3.1	Konzept	35
3.2	Einheiten	35
3.2.1	Imaginäre Einheit	35
3.2.2	Längeneinheit und Zeiteinheit	37
3.2.3	Abstrakte Einheiten	37
3.3	Indizes	37
3.3.1	Allgemeine Indizes	37
3.3.2	Komponentenindizes	38
3.3.3	Zyklische Indizes	38
3.3.4	Zeilenindizes und Spaltenindizes	38
3.4	Spezielle Mengen	39
3.4.1	Produkt der reellen Zahlen mit einer Einheit	39
3.4.2	Längen und Zeiten	40
3.4.3	Funktionen und Skalarfelder	41
3.4.4	Skalarobjekte	42
3.4.5	Skalaroperatoren	42
3.4.6	Objekte	43
3.4.7	Operatoren	44
3.4.8	Beschränkte Funktionen	45
4	Operatoren und Objekte	47
4.1	Wirkungsrichtung der Operatoren	47
4.2	Wirkungsbereiche der Operatoren	47
4.3	Objektaxiome	51
4.4	Operatoraxiome	52
4.5	Hybridsymbole für Operatoren und Objekte	54
5	Vektoren in Dirac–Notation	55

5.1	Vektortypen	55
5.1.1	Typenlose Vektoren	55
5.1.2	Zeilenvektoren	56
5.1.3	Spaltenvektoren	56
5.1.4	Verknüpfung der Vektortypen	56
5.2	Vektoraddition	57
5.3	Vektoren in Aufzählungslisten	58
5.4	Einheitsvektoren	58
5.5	Ortsvektor	59
5.6	Parameterregeln	59
5.7	Skalarprodukt (Inneres Produkt)	60
5.8	Dyadisches Produkt	60
5.9	Betragsquadrat	62
5.10	Vektorkomponenten	63
5.11	Matrizen	63
5.12	Einheitsmatrix	64
5.13	Kronecker–Delta	64
5.14	Einheitsteilmatrix	65
5.15	Matrixkomponente	66
5.16	Einkomponentenmatrix	66
5.17	Matrizenaddition	66
5.18	Zeilen und Spalten einer Matrix	67
5.19	Matrizenmultiplikation	68
5.20	Multiplikation von Matrizen mit Vektoren	68
5.21	Diagonalskalarmatrix	69
5.22	Vektorprodukt (Kreuzprodukt)	70
5.22.1	Antikommutativität	72
5.23	Spur einer Matrix	72
5.24	Skalarmultiplikation mit Vektoren	73
5.25	Konstellationen	74

5.26	Skalierte Kreuzproduktmatrizen und Vektoren	75
5.27	Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen	75
5.28	Basiszerlegung von Vektorproduktmatrizen	78
5.29	Drehmatrizen	80
5.30	Drehmatrizen und Vektorproduktmatrizen	81
6	Spezielle Operatoren	83
6.1	Differentialableitungsoperatoren	83
6.1.1	Globales Differential: Steigungsfunktion	83
6.1.2	Lokales Differential: Örtliche Steigung	84
6.1.3	Taylorentwicklungsoperator	85
6.1.4	Zeitentwicklungsoperator	85
6.1.5	Ortsentwicklungsoperator	86
6.2	Integraloperatoren	86
6.2.1	Lokales Integral: Fläche	86
6.2.2	Globales Integral: Stammfunktion	87
6.3	Nabla–Operator	89
6.4	Gradient	90
6.5	Divergenz	90
6.6	Rotation	90
6.7	Laplace–Operator	91
6.8	Hesse–Matrix	91
6.9	Jacobi–Matrix	91
6.10	Antidivergenz	92
6.11	Antigradient	92
6.12	Doppeltes Kreuzprodukt	93
6.13	Nabla in Kugelkoordinaten?	94
6.14	Konstantenmengen	95

Kapitel 1

Voraussetzungen

1.1 Erforderliches Wissen

Dieser Aufsatz setzt zum Verständnis gute Kenntnisse der Vektoranalysis und des Nablakalküls, der Vektor- und Matrizenrechnung sowie der Differential- und Integralrechnung voraus. Außerdem sollten gute Kenntnisse über Quantorenlogik, insbesondere die typographische Zahlentheorie „*Theoria Numerorum Typographica*“ (TNT) sowie Grundkenntnisse über die bisher übliche Benutzung von Dirac-Vektoren vorhanden sein.

1.2 Verweis zu einem anderen Aufsatz

Aus meinem Aufsatz „*Differentiell superkontinuierliche Funktionenklassen*“ vom 20. April 2010 wird der selbst definierte Begriff der differentiell superkontinuierlichen Funktion übernommen:

[http://www.stefanpudritzki.de/SP_Dokumente/
Differentiell-Superkontinuierliche-Funktionen.pdf](http://www.stefanpudritzki.de/SP_Dokumente/Differentiell-Superkontinuierliche-Funktionen.pdf)

1.2.1 Differentiell superkontinuierliche Funktionen

dsFct-Def

(1.1)

Eine Funktion $f(x)$ soll „*differentiell superkontinuierlich in x* “ heißen, wenn sie in jedem Punkt x_0 aus der Menge aller reellen Zahlen als Definitionsbereich beliebig oft nach der Variable x differenzierbar ist und ohne stetige Fortsetzung und ohne Fallunterscheidung in jedem Punkt einen eindeutigen Funktionswert besitzt.

1.3 Versionsnummer dieses Aufsatzes

Die Versionsnummer dieses Aufsatzes hat die Struktur $m.n$, wobei sich bei jeder neuen Version die Nummer m nur dann um 1 erhöht, wenn ich Änderungen im Axiomensystem vorgenommen habe. Eine neue Unterversion $m.(n + 1)$ bedeutet lediglich, dass es Änderungen oder Ergänzungen in der Beweisführung unter dem selben Axiomensystem gegeben hat.

1.4 Dreidimensionaler Raum

Alle Definitionen beziehen sich auf den dreidimensionalen, orthogonalen, euklidischen isotropen und homogenen reellen Raum \mathbb{R}^3 .

1.5 Logische Grundfunktionen

Für aussagenlogische Beweise können die folgenden tabellarisch zusammengefassten äquivalenten Beziehungen logischer Grundfunktionen sehr nützlich sein:

1.5.1 UND

				1	2	3	4
a	b	$\sim a$	$\sim b$	$a \wedge b$	$a \wedge \sim b$	$\sim a \wedge b$	$\sim a \wedge \sim b$
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
				$\sim(\sim a \vee \sim b)$	$\sim(a \implies b)$	$\sim(b \implies a)$	$\sim(a \vee b)$

1.5.2 ODER

				1	2	3	4
a	b	$\sim a$	$\sim b$	$a \vee b$	$a \vee \sim b$	$\sim a \vee b$	$\sim a \vee \sim b$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0
				$\sim(\sim a \wedge \sim b)$	$b \implies a$	$a \implies b$	$\sim(a \wedge b)$

Die aussagenlogisch wichtige Kontrapositionsregel lautet:

$$(a \implies b) \iff (\sim b \implies \sim a)$$

Kapitel 2

Quantorenlogik

2.1 Praktikable Modifikation des TNT-Systems: Das SP-TNT-System

2.1.1 Quantoren

Für eindeutige Aussagen sind grundsätzlich immer Quantoren notwendig. Wenn wir beispielsweise Δ als Symbol für die Menge aller Dreiecke interpretieren und die drei Seitenlängen mit a, b, c bezeichnen, dann kann der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ kein eindeutiger Wahrheitswert zugeordnet werden. Es handelt sich zunächst nur um eine „*offene Formel*“. Erst die Quantifizierung macht daraus eine „*geschlossene Formel*“ und damit zu einer eindeutigen Aussage:

$$\forall \Delta : a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{eindeutig falsch}$$

$$\exists \Delta : a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{eindeutig wahr}$$

2.1.2 Funktionen als quantifizierbare Variablen

Die Quantoren gehören immer auf die linke Seite vor einer offenen Formel. Die manchmal nachlässige Schreibweise des Hintenanstellens wird nicht verwendet. Dies führt dann zu Unklarheiten, wenn mindestens ein Existenzquantor vorhanden ist, z.B.:

$$\exists y : y = x^2 \text{ für alle } x \quad \text{unklare Aussage!}$$

Unterschiedliche Stellungen unterschiedlicher Quantoren führen zu unterschiedlichen Aussagen:

$$\forall x : \exists y : y = x^2 \quad \text{Deutung 1}$$

$$\exists y : \forall x : y = x^2 \quad \text{Deutung 2}$$

Die Aussage der Deutung 1 ist, dass zu jedem beliebig gewählten x das Quadrat von x eine Lösung y hat. Deutung 1 ist offensichtlich eine wahre Aussage.

Die Deutung 2 scheint falsch zu sein, da es keine konstante Zahl gibt, die das Quadrat jeder beliebigen Zahl ist. Wenn wir aber im Axiomensystem den Begriff der Funktion als quantifizierbares Objekt hinzunehmen und y als eine von x abhängige Funktion interpretieren, dann kann die Deutung 2 wahr werden.

Angenommen wir hätten die folgende Funktion definiert:

$$\forall x : \text{sqr}(x) = x^2$$

Dann kämen wir mit Hilfe der Existenzregel der Aussagenlogik genau zu der Form der Deutung 2:

$$\exists y : \forall x : y = x^2 \quad \text{Existenzregel}$$

Die in diesem modifizierten TNT-System beabsichtigte Interpretation ist: Es existiert eine Funktion y , die zu jedem x das Quadrat x^2 liefert. Funktionen sollen in diesem Axiomensystem grundsätzlich als quantifizierbare Objekte zugelassen sein. Damit wären auch alle Zahlen als spezielle Funktionen, nämlich als Konstantenfunktionen, enthalten.

Ist die Aussage nach Anwendung der Existenzregel allein nur deshalb wahr, weil wir der Funktion der Quadrate einen expliziten Namen gegeben haben oder weil wir den Begriff der Funktion als quantifizierbares Objekt zugelassen haben? — Meines Erachtens trifft Letzteres zu.

2.1.3 Import der TNT-Regeln

Es werden alle Regeln der typographischen Zahlentheorie „*Theoria Numerorum Typographica*“ (TNT) für Äquivalenzumformungen der Aussagen entsprechend der hier verwendeten Notation übernommen.

2.1.4 Farbige mathematische Sätze

Die unterschiedlichen Gültigkeitsbereiche der Aussagen werden zusätzlich farblich gekennzeichnet:

<i>A</i>	Axiom, globale Voraussetzung, Definition	RGB = (0.000, 0.500, 1.000)
<i>B</i>	allgemeingültiger abgeleiteter Satz	RGB = (0.000, 0.750, 0.000)
<i>C</i>	Voraussetzungen und Aussagen innerhalb einer Phantasie	RGB = (0.750, 0.000, 0.750)
<i>D</i>	Zitat oder verworfene konventionelle Formel	RGB = (0.750, 0.000, 0.000)
<i>E</i>	Erläuterung, kein abgeleiteter Satz, Metadiskussion	RGB = (1.000, 1.000, 1.000)

Die Farbwerte sind so gewählt, dass in beiden Versionen dieses Aufsatzes sowohl bei schwarzem als auch bei weißem Hintergrund die farbigen Formeln gut lesbar sind.

2.1.5 Beweisführung

Gegeben sei beispielsweise wie oben *B* ein abgeleiteter Satz:

(1) *B* allgemeiner Satz

Wir machen eine Voraussetzung, die uns in eine Phantasieebene hineinbringt. Die Phantasieebenen werden, abweichend vom TNT-System, durch Gliederungen der Zeilennummerierung mit Gliederungspunkten verwirklicht:

(1.1)	<i>C</i>	Voraussetzung: zusätzliche Gliederungstiefe der Zeilennummern
(1.2)	<i>B</i>	Übernahme der Zeile 1 nach der Übernahmeregel
(1.3)	$C \wedge B$	Verbindungsregel für Zeilen 1.1 und 1.2

Mit Hilfe der Phantasierregel kann der folgende allgemeingültige Satz erzeugt werden:

(2) $C \implies (C \wedge B)$ Phantasierregel

In jeder Phantasieebene wird das dunkle Magenta zur farblichen Kennzeichnung verwendet. Das dunkle Grün wird ausschließlich in der obersten Bedeutungsebene für allgemein gültige Sätze und der dunkle türkis–blaue Farbton für Axiome verwendet.

Nach den TNT–Regeln eröffnet jede Voraussetzung eine neue Phantasieebene. Das TNT–System erlaubt nur genau eine Voraussetzung in der ersten Zeile einer Phantasie. Wenn mehrere Voraussetzungen gemacht werden sollen, können diese aufgrund der Verbindungsregel mit dem logischen UND verknüpft werden und können so formal als eine Voraussetzung gelten, die dann wieder mit der Trennungsregel in einzelne Aussagen zerlegt werden kann:

- | | | |
|-------|-------------------------------|------------------------------|
| (2.1) | $C_1 \wedge (C_2 \wedge C_3)$ | Voraussetzung 2.1 |
| (2.2) | $C_2 \wedge C_3$ | Trennungsregel für Zeile 2.1 |
| (2.3) | C_1 | Trennungsregel für Zeile 2.1 |
| (2.4) | C_2 | Trennungsregel für Zeile 2.2 |
| (2.5) | C_3 | Trennungsregel für Zeile 2.2 |

Um dies etwas abzukürzen, sei es erlaubt, in den allerersten Zeilen einer neuen Phantasie mehrere Voraussetzungen zu nennen. Ein horizontaler Trennstrich trennt die Liste der Voraussetzungen von den nachfolgenden Ableitungen. Nach jedem Gliederungspunkt seien die natürlichen Zahlen von 1 bis 99 für Voraussetzungen reserviert. Jede abgeleitete Aussage innerhalb einer Phantasie soll erst mit der Zahl 100 beginnen:

- | | | |
|---------|----------------|--|
| (3.1) | C_1 | Voraussetzung 3.1 |
| (3.2) | C_2 | Voraussetzung 3.2 |
| (3.3) | C_3 | Voraussetzung 3.3 |
| | | |
| (3.100) | B | Übernahme der Zeile 1 nach der Übernahmeregeln |
| (3.101) | $B \wedge C_2$ | Verbindungsregel für Zeilen 3.2 und 3.100 |

Wenn zwei Phantasien nacheinanderfolgend aufgeschrieben werden, ohne dass in der nächst höheren Logikebene ein Satz aufgeschrieben wurde, so ist die Zeilennummer für diese Ebene um 1 zu erhöhen. In dem obigen Beispiel ist also die Zeilennummer vor dem Gliederungspunkt von 2 auf 3 erhöht worden.

Bei der Anwendung der Phantasieregel müssen dann allerdings alle Voraussetzungen per Verbindungsregel zusammengefügt und in Klammern gesetzt werden:

$$(4) \quad (C_1 \wedge (C_2 \wedge C_3)) \implies (B \wedge C_2) \quad \text{erweiterte Phantasieregel}$$

In den meisten Fällen dürfte es ausreichen, genau eine Phantasieebene zu benutzen. Sollten doch einmal mehrere Phantasieebenen notwendig sein, so werden diese durch die Gliederung der Zeilennummer mit jeweils einem weiteren Punkt gekennzeichnet. Jede Phantasieebene erhält einen zusätzlichen Gliederungspunkt in der Zeilennummer derjenigen Zeile, die unmittelbar vor der Phantasie liegt. Zur besseren optischen Trennung sollte jede Phantasie in einem eigenen Absatz aufgeschrieben werden. Zur Veranschaulichung spielen wir ein wenig mit verschiedenen Phantasien herum:

$$(5) \quad B_1 \quad \text{allgemeiner Satz}$$

$$(6) \quad B_2 \quad \text{allgemeiner Satz}$$

(6.1)	C_1	Voraussetzung 6.1: Phantasieebene 1
(6.2)	C_2	Voraussetzung 6.2: Phantasieebene 1
(6.100)	$C_1 \wedge C_2$	Verbindungsregel für Zeilen 6.1 und 6.2

(6.100.1)	D_1	Voraussetzung 6.100.1: Phantasieebene 2
(6.100.100)	$C_1 \wedge C_2$	Übernahme der Zeile 6.100 nach der Übernahmeregeln
(6.100.101)	$D_1 \wedge (C_1 \wedge C_2)$	Verbindungsregel für Zeilen 6.100.1 und 6.100.100

$$(6.101) \quad D_1 \implies (D_1 \wedge (C_1 \wedge C_2)) \quad \text{Phantasieregel}$$

(6.101.1)	D_1	Voraussetzung 6.101.1: Phantasieebene 2
(6.101.100)	$D_1 \implies (D_1 \wedge (C_1 \wedge C_2))$	Übernahme der Zeile 6.101 nach der Übernahmeregel
(6.101.101)	$D_1 \wedge (C_1 \wedge C_2)$	Abtrennungsregel für Zeilen 6.101.1 und 6.101.100
(6.101.102)	$C_1 \wedge C_2$	Trennungsregel für Zeile 6.101.101
(6.101.103)	D_1	Trennungsregel für Zeile 6.101.101

$$(6.102) \quad D_1 \implies D_1 \quad \text{Phantasieregel}$$

$$(6.103) \quad D_1 \vee \sim D_1 \quad \text{ODER-Tabelle (1.5.2)}$$

$$(7) \quad (C_1 \wedge C_2) \implies (D_1 \vee \sim D_1) \quad \text{erweiterte Phantasieregel für die Zeilen 6.1, 6.2 und 6.103}$$

Die Phantasien, die in den Zeilen 6.100.1 und 6.101.1 beginnen, befinden sich zwar auf der selben Phantasieebene 2, sie sind aber unabhängig voneinander. Es handelt sich hier um eine Verzweigung zweier unterschiedlicher Phantasien. In beiden Fällen wird zwar D_1 vorausgesetzt, jedoch können die Schlussfolgerungen auf Grund der Übernahme unterschiedlicher Sätze unterschiedlich ausfallen.

Für Verweise auf Axiome und auf bereits abgeleitete Sätze und auf mehrzeilige Ableitungsabsätze werden zusätzlich jeweils ein symbolischer Kurzname und eine Nummer verwendet, die in die erste Zeile eines Ableitungsabsatzes mit der normalen Textfarbe gesetzt werden, wie im folgenden Beispiel gezeigt wird:

C1C2-Ph			(2.1)
(7.1)	C_1	Voraussetzung 7.1	
(7.2)	C_2	Voraussetzung 7.2	
(7.100)	$C_1 \wedge C_2$	Verbindungsregel für Zeilen 7.1 und 7.2	
(7.101)	$(C_1 \wedge C_2) \implies (D_1 \vee \sim D_1)$	Übernahme der Zeile 7	
(7.102)	$D_1 \vee \sim D_1$	Abtrennungsregel für Zeilen 7.100 und 7.101	

Die symbolischen Namen können in einem Textsatzsystem wie z.B. TeX bzw. LaTeX zur automatischen Erzeugung der Referenznummern verwendet werden. Durch die Verwendung der symbolischen Namen ist es möglich, die Zeilennummerierung wieder von vorne beginnen zu lassen. Bei Verweisen auf bereits abgeleitete Sätze müssen dann sowohl der symbolische Name des Beweisabsatzes als auch die Zeilennummer angegeben werden.

Bei längeren Ableitungen kann ein Beweis auch in mehrere Absätze zerlegt werden. Jeder Absatz bekommt dann einen entsprechenden Namenszusatz in der Form „-Teil{n}“, z.B.:

C1C2-Ph-Teil0			(2.2)
(8.1)	C_1	Voraussetzung 8.1	
(8.2)	C_2	Voraussetzung 8.2	

Der Teil0 einer Phantasie könnte ausschließlich aus einer Voraussetzungsliste bestehen. Dennoch soll immer ein horizontaler Trennstrich zur Abgrenzung zu den nachfolgenden Ableitungen gesetzt werden. Im folgenden Beispiel bekommt der Ableitungsabsatz der Phantasie den Namenszusatz „-Teil1“:

C1C2-Ph-Teil1

(2.3)

- (8.100) $C_1 \wedge C_2$ Verbindungsregel für Zeilen 8.1 und 8.2
- (8.101) $(C_1 \wedge C_2) \implies (D_1 \vee \sim D_1)$ Übernahme der Zeile 7 nach der Übernahmeregeln
- (8.102) $D_1 \vee \sim D_1$ Abtrennungsregel für Zeilen 8.100 und 8.101

So kann man in einem Text und vor Allem in Kommentaren weiterer Ableitungen auf eine andere Ableitung oder einen anderen abgeleiteten Satz verweisen:

C1C2D1D2-S

(2.4)

- (9) $(C_1 \wedge C_2) \implies (D_1 \vee \sim D_1)$ erweiterte Phantasierregel für die Phantasie (2.2) Zeilen 8.1 und 8.2 und (2.3) Zeile 8.102

Enthält ein Beweisabsatz mit eigenem symbolischen Namen nur genau ein Satz in einer Zeile, so kann die Zeilennummer entfallen:

C1C2D1D2-S-2

(2.5)

- $(C_1 \wedge C_2) \implies (D_1 \vee \sim D_1)$ erweiterte Phantasierregel für die Phantasie (2.2) Zeilen 8.1 und 8.2 und (2.3) Zeile 8.102

Einige Ableitungen später kann im Kommentar ein Verweis auf einen abgeleiteten Satz gesetzt werden, der für die Äquivalenzumformung zur aktuellen Zeile benutzt worden ist:

C1C2D1D2-Abl

(2.6)

- ... Ableitungen
- (999) $(\sim (D_1 \vee \sim D_1)) \implies (\sim (C_1 \wedge C_2))$ Kontraposition zu Satz (2.5)

Die Reservierung der Nummern 1 bis 99 für die Voraussetzungen einer Phantasie erleichtert die spätere Ergänzung der Voraussetzungenliste, ohne die Zeilennummern der nachfolgenden bereits abgeleiteten Sätze innerhalb dieser Phantasie ändern zu müssen. Aus dem gleichen Grund ist es empfehlenswert, bei längeren Ableitungen systemmatische Lücken in der Zeilennumerierung einzubauen, um bei einer Beweisänderung nicht alle Zeilennummern der nachfolgenden Beweisabsätze ändern zu müssen. Bei einem neuen Beweisabsatz sollte zum Beispiel die Nummer nach dem letzten Gliederungspunkt auf die nächst höhere Hunderternummer aufgerundet werden.

Für die symbolischen Namen der Beweisabsätze empfehle ich die folgenden Abkürzungen als Suffixe:

- Def Definition durch ein Axiom
- S Satz der obersten Logikebene (genau ein Satz)
- Abl Ableitungsabsatz in der obersten Logikebene mit einem Satz oder mehreren Sätzen
- Ph Voraussetzungen und Aussagen in einer Phantasie
- Teil{n} Suffixergänzung für die Absätze langer Ableitungen

2.1.6 Zeichenvorrat

Als Symbolvorrat dienen fast alle lateinischen, griechischen und kalligraphischen Buchstaben:

Symbole-Def

(2.7)

- (1) $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$
- (2) $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$
- (3) $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \vartheta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \pi, \varpi, \rho, \varrho, \sigma, \varsigma, \tau, \upsilon, \phi, \varphi, \chi, \psi, \omega\}$
- (4) $\{\Delta, \Gamma, \Theta, \Lambda, \Sigma, \Upsilon, \Phi, \Psi, \Omega\}$
- (5) $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$

Wegen der Verwechslungsgefahr zum Zahlsymbol 0 werden der kleine lateinische Buchstabe *o* und der große lateinische Buchstabe *O* nicht verwendet. Ebenso entfällt der kleine griechische Buchstabe ν , da die Ähnlichkeit zum kleinen lateinischen Buchstaben *v* viel zu groß ist. Insbesondere bei handschriftlichen Ableitungen besteht eine große Verwechslungsgefahr. Wegen Verwechslungsgefahr zum Zahlsymbol 0 entfällt auch das kalligraphische Symbol *O*.

2.1.7 Mengensymbole

Die Liste der Mengensymbole wird durch einen Zeichensatz mit doppelten Strichen dargestellt:

$$\boxed{\text{Mengensymbole-Def}} \quad (2.8)$$

{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z}

2.1.8 Bedeutungslosigkeit der nackten Symbole

Die nackten Buchstabensymbole ohne Zusatzsymbole haben zunächst keine Bedeutung. Sie sind keiner Menge zugeordnet:

$$\boxed{\text{nackte-Symbole-Def}} \quad (2.9)$$

$$\forall a : \forall X : \sim a \in X$$

Hier bietet sich die Gelegenheit, die Anwendung einer der Quantorenaustauschregeln darzustellen:

$$\boxed{\text{nackte-Symbole-Abl}} \quad (2.10)$$

$$(1) \quad \forall a : \forall X : \sim a \in X \quad \text{Definition } \underline{(2.9)}$$

$$(2) \quad \forall a : \sim \exists X : a \in X \quad \text{Quantorenaustauschregel}$$

$$(3) \quad \sim \exists a : \exists X : a \in X \quad \text{Quantorenaustauschregel}$$

2.1.9 Mengen

Aussageform von Mengen

In diesem Abschnitt stelle ich ein allgemeines Schema vor, mit dem neue Mengen anhand einer beliebigen Anzahl von Axiomen mit beliebig vielen Aussagevariablen definiert werden können. Die bisher gebräuchliche Schreibweise der Aussageform von Mengen

$$\{x \mid F(x)\} \quad \text{„Die Menge aller } x, \text{ für die } F(x) \text{ gilt“}$$

erlaubt keine Mengendefinitionen mit mehreren Aussagevariablen mit unterschiedlichen Quantoren. Deshalb modifizieren wir die Aussageform von Mengen in Richtung Quantorenschreibweise. Wir betrachten dazu zunächst ein einfaches Beispiel:

Eine Menge \mathbb{X} soll mit Hilfe einer offenen Formel $F(x)$ mit der frei wählbaren Variable x mit Hilfe von Quantorenlogik definiert werden:

$$\mathbb{X} = \{\forall x : F(x)\}$$

Die Menge \mathbb{X} wäre diejenige Menge, in der für alle x die Formel $F(x)$ gilt.

Die Aussage, dass y ein Element der Menge \mathbb{X} ist, soll äquivalent zu der Aussage der geschlossenen mengendefinierenden Formel bezogen auf y sein:

$$y \in \mathbb{X} \iff \forall y : F(y)$$

Die Variable x ist eine lokale, innerhalb der Menge \mathbb{X} gebundene Variable. Erst die Voraussetzung, dass eine Variable y Element der Menge \mathbb{X} ist, erzeugt die geschlossene Formel mit der Variable y als Folgerung. Umgekehrt gilt bei Voraussetzung der geschlossenen Formel mit der Variable y die Folgerung, dass y ein Element der Menge \mathbb{X} ist.

Beispiel 1:

$$\mathbb{X} = \{\forall x : x \bmod 3 = 0\} \quad \begin{array}{l} \text{Die Menge aller durch 3 teilbaren} \\ \text{Zahlen} \end{array}$$

Dann gilt die folgende Äquivalenz:

$$y \in \mathbb{X} \iff \forall y : y \bmod 3 = 0$$

Beispiel 2:

Sei $A(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)})$ eine geschlossene Formel für die drei Variablen $x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}$ derselben mathematischen Struktur und sei

$$\mathbb{X} = \{A(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)})\}$$

Wenn beispielsweise nur zwei Symbole als Elemente von \mathbb{X} erklärt werden, dann gilt die Aussage A für alle Permutationen und Wiederholungen dieser beiden Symbole in der Parameterliste von A :

$$\{y_{(1)}, y_{(2)}\} \subset \mathbb{X}$$

$$\iff$$

$$A(y_{(1)}, y_{(1)}, y_{(1)}) \wedge A(y_{(1)}, y_{(1)}, y_{(2)}) \wedge A(y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(1)}) \wedge A(y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(2)})$$

$$\wedge A(y_{(2)}, y_{(1)}, y_{(1)}) \wedge A(y_{(2)}, y_{(1)}, y_{(2)}) \wedge A(y_{(2)}, y_{(2)}, y_{(1)}) \wedge A(y_{(2)}, y_{(2)}, y_{(2)})$$

Wenn drei oder mehr Variablen Elemente dieser Menge sind, dann gilt für jede Auswahl von drei Variablen:

$$\{y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)}\} \subset \mathbb{X}$$

$$\iff$$

$$A(y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)}) \wedge A(y_{(2)}, y_{(3)}, y_{(1)}) \wedge A(y_{(3)}, y_{(1)}, y_{(2)})$$

$$\wedge A(y_{(1)}, y_{(3)}, y_{(2)}) \wedge A(y_{(2)}, y_{(1)}, y_{(3)}) \wedge A(y_{(3)}, y_{(2)}, y_{(1)})$$

Mengendefinitionsschema

Mengen können durch eine Liste von geschlossenen Formeln als Axiome mit jeweils unterschiedlicher Anzahl der Variablen definiert werden. Um ein allgemeines Mengendefinitionsschema zu formulieren, seien $A_{(j,k)}(x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ geschlossene Formeln unter Verwendung der offenen Formeln $F_{(j,k)}(x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ mit der Zeilennummer j und der Anzahl k der Variablen derselben mathematischen Struktur einer rechteckigen $m \times n$ -Matrix. Außerdem sei Q eine Zeichenkette mit sonstigen quantifizierten Variablen. Hierbei kann Q an Existenzquantoren gebundene Variablen oder an Allquantoren gebundene Variablen, die einer anderen Menge als die Variablen $x_{(n)}$ angehören, enthalten oder eine leere Zeichenkette sein:

$$A_{(j,k)}(x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) \iff \forall x_{(1)} : \dots \forall x_{(k)} : Q F_{(j,k)}(x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$$

Eine Menge \mathbb{X} kann nun mit einer rechteckigen $m \times n$ -Matrix von geschlossenen Formeln definiert werden:

$$\mathbb{X} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} A_{(1,1)}(x_{(1)}) & \cdots & A_{(1,n)}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{(m,1)}(x_{(1)}) & \cdots & A_{(m,n)}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \end{array} \right) \right\}$$

Diese Schema deckt allerdings noch nicht alle Formen der Axiome ab. Gegebenenfalls kann die Liste der Axiome noch durch solche ergänzt werden, die mit einem Existenzquantor beginnen, z.B.:

$$\exists x : x^2 = 2$$

Alle Komponenten dieser Aussagenmatrix und zusätzliche Axiome der Menge können als eine Gesamtaussage durch logische UND-Verknüpfung aufgefasst werden. Das entspricht der Verbindungsregel bzw. der Trennungsregel der TNT-Aussagenlogik.

Für den Fall, dass die Zahl der deklarierten Elemente einer Menge \mathbb{X} kleiner ist, als die maximale Zahl der frei wählbaren Variablen der in der Menge \mathbb{X} definierenden Axiome, gelten alle Axiome der Menge \mathbb{X} für die deklarierten Variablen gegebenenfalls unter allen Permutationen und Wiederholungen dieser Variablen.

Symbole zur Formulierung der Mengen-Axiome

Um eine bequeme Möglichkeit zur Formulierung von Axiomen einer Menge zu ermöglichen, seien alle Symbole, die mit einem Mengensymbol indiziert sind, Elemente dieser Menge:

$$\boxed{\text{Elementsymbole-Def}} \tag{2.11}$$

$$\forall a : \forall \mathbb{X} : a_{\mathbb{X}} \in \mathbb{X}$$

Durch Spezialisierungen des Mengensymbols \mathbb{X} im Axiom (2.11) auf bestimmte mathematisch vordefinierte Mengen erhalten wir die folgenden Sätze, die häufig gebraucht werden:

$$\boxed{\text{Elementsymbole-Abl}} \tag{2.12}$$

$$(1) \quad \forall a : a_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$$

$$(2) \quad \forall a : a_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

$$(3) \quad \forall a : a_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$$

$$(4) \quad \forall a : a_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$$

$$(5) \quad \forall a : a_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$$

Die Spezialisierungsregel und die Generalisierungsregel scheinen für beide Symboleformen, sowohl für a als auch für $a_{\mathbb{X}}$, anwendbar zu sein:

Elementsymbole-und-nackte-Symbole-Abl

(2.13)

- (1) $\forall a : \forall \mathbb{X} : a_{\mathbb{X}} \in \mathbb{X}$ Axiom [\(2.11\)](#)
- (2) $\forall \mathbb{X} : b_{\mathbb{X}} \in \mathbb{X}$ Spezialisierungsregel für das Symbol a mit dem Symbol b
- (3) $\forall b : \forall \mathbb{X} : b_{\mathbb{X}} \in \mathbb{X}$ Generalisierungsregel für Zeile 2 für das Symbol b
- (4) $\forall b_{\mathbb{X}} : \forall \mathbb{X} : b_{\mathbb{X}} \in \mathbb{X}$ Generalisierungsregel für Zeile 2 für das Symbol $b_{\mathbb{X}}$, vgl. Zeile 3
- (5) $\forall \mathbb{X} : a_{\mathbb{X}} \in \mathbb{X}$ Spezialisierungsregel für das Symbol $b_{\mathbb{X}}$ mit $a_{\mathbb{X}}$
- (6) $\forall a_{\mathbb{X}} : \forall \mathbb{X} : a_{\mathbb{X}} \in \mathbb{X}$ Generalisierungsregel für das Symbol $a_{\mathbb{X}}$, vgl. Zeile 1

Mit dem abstrakten Axiom [\(2.11\)](#) wird es auch möglich, durch Formulierung von Axiomen, in denen beispielsweise die Symbole $a_{\mathbb{X}}$ und $a_{\mathbb{Y}}$ vorkommen, die Beziehungen zwischen den Mengen \mathbb{X} und \mathbb{Y} durch offene Formeln, z.B. in der Form $F(a_{\mathbb{X}}, a_{\mathbb{Y}})$, festzulegen. Die quantifizierbaren Variablen sind dann die Symbole $a_{\mathbb{X}}$ und $a_{\mathbb{Y}}$, z.B.:

$$\forall a_{\mathbb{X}} : \forall a_{\mathbb{Y}} : F(a_{\mathbb{X}}, a_{\mathbb{Y}})$$

2.1.10 Widerspruchsfreie Mengenzugehörigkeiten

Grundsätzlich sollte vermieden werden, eine Variable als Element mehrerer verschiedener Mengen zu deklarieren. So kann beispielsweise keine Variable gleichzeitig Element der natürlichen Zahlen und Element der ganzen Zahlen sein.

Eine Eigenschaft der natürlichen Zahlen lautet, dass es keine Zahl gibt, so dass der Nachfolger die Null ergibt:

$$\boxed{\text{Eine-N-Eigenschaft}} \quad (2.14)$$

$$\sim \exists x : x + 1 = 0 \quad \text{Eine Eigenschaft der natürlichen Zahlen}$$

Jede ganze Zahl hat die Eigenschaft, ein Inverses Element bezüglich der Addition zu haben:

$$\boxed{\text{Eine-Z-Eigenschaft}} \quad (2.15)$$

- (1) $\forall x : \exists y : x + y = 0$ Eine Eigenschaft der ganzen Zahlen
- (2) $\exists y : (-1) + y = 0$ Spezialisierungsregel
- (3) $(-1) + 1 = 0$ Existenzregel
- (4) $\exists x : x + 1 = 0$ Existenzregel

Es entstünde also ein Widerspruch zwischen einer Eigenschaft der natürlichen Zahlen [\(2.14\)](#) und einer Eigenschaft der ganzen Zahlen [\(2.15\)](#) Zeile 4. Ein Symbol darf nur dann gleichzeitig zu Elementen zweier Mengen deklariert werden, wenn sich die mengendefinierenden Axiome nicht widersprechen.

Nach dem Axiom [\(2.11\)](#) gelten die Sätze über natürliche Zahlen und ganze Zahlen:

$$\boxed{\text{N-Z-Eigenschaft-S}} \quad (2.16)$$

- (1) $\sim \exists x_{\mathbb{N}} : x_{\mathbb{N}} + 1 = 0$ Eine Eigenschaft der natürlichen Zahlen
- (2) $\exists x_{\mathbb{Z}} : x_{\mathbb{Z}} + 1 = 0$ Eine Eigenschaft der ganzen Zahlen

Das Symbol 0 ist ein Element der natürlichen Zahlen, da es ja sonst gar nicht möglich wäre, ein Axiom wie [\(2.14\)](#) zu formulieren. Die Null ist also auch in der Menge der natürlichen Zahlen enthalten:

$$\boxed{\text{Null-S}} \tag{2.17}$$

$$0 \in \mathbb{N}$$

2.1.11 Induktionsbeweise

Induktionsbeweise können nach dem folgenden Schema durchgeführt werden, wenn $F_{(n_{\mathbb{N}})}$ eine offene Formel in Abhängigkeit der natürlichen Zahl $n_{\mathbb{N}}$ ist und $F_{(0)}$ ein Satz ist und untersucht werden soll, ob $F_{(n_{\mathbb{N}})}$ für alle $n_{\mathbb{N}}$ gültig ist:

Beweisschema 1:

Induktionsvermutung1 (2.18)

- (1) $\forall n_{\mathbb{N}} : F_{(n_{\mathbb{N}})}$ vermuteter Satz, normale Textfarbe
- (2) $F_{(n_{\mathbb{N}})}$ Spezialisierungsregel

Induktionsanfang1 (2.19)

- (3) $F_{(0)}$ Satz, Induktionsanfang

Induktion1-Ph-Teil0 (2.20)

- (3.1) $F_{(n_{\mathbb{N}})}$ Voraussetzung 3.1:
Induktionsbehauptung
-

Induktion1-Ph-Teil1 (2.21)

- (3.100) $F_{(n_{\mathbb{N}})}$ Voraussetzung [\(2.20\)](#) Zeile 3.1
- ... Ableitungsschritte
- (3.999) $F_{(n_{\mathbb{N}}+1)}$ Ergebnis der Ableitungen

Induktion1-Abl

(2.22)

- (4) $F_{(n_{\mathbb{N}})} \implies F_{(n_{\mathbb{N}}+1)}$ Phantasierregel für (2.20) Zeile 3.1 und (2.21) Zeile 3.999
- (5) $\forall n_{\mathbb{N}} : (F_{(n_{\mathbb{N}})} \implies F_{(n_{\mathbb{N}}+1)})$ Generalisierungsregel
- (6) $\forall n_{\mathbb{N}} : F_{(n_{\mathbb{N}})}$ Induktionsregel mit Induktionsanfang (2.19)

Beweisschema 2:

Das zweite Beweisschema soll zeigen, wie es möglich ist, innerhalb der Phantasie die komplizierte Bezeichnung $n_{\mathbb{N}}$ durch die einfache Bezeichnung n zu ersetzen. Hierbei ist aber eine zweite Phantasieebene notwendig, in der n als eine natürliche Zahl vorausgesetzt wird:

Induktionsvermutung2

(2.23)

- (1) $\forall n_{\mathbb{N}} : F_{(n_{\mathbb{N}})}$ vermuteter Satz, normale Textfarbe
- (2) $F_{(n_{\mathbb{N}})}$ Spezialisierungsregel

Induktionsanfang2

(2.24)

- (3) $F_{(0)}$ Satz, Induktionsanfang

Induktion2-Ph-Teil0

(2.25)

- (3.1) $F_{(n_{\mathbb{N}})}$ Voraussetzung 3.1: Induktionsbehauptung
-

Induktion2-SubPh-Teil0

(2.26)

(3.100.1) $n \in \mathbb{N}$ Voraussetzung 3.100.1:
 n als natürliche Zahl

Induktion2-SubPh-Teil1

(2.27)

(3.100.100) $F_{(n_{\mathbb{N}})}$ Übernahme der Voraussetzung
(2.25) Zeile 3.1

(3.100.101) $\forall n_{\mathbb{N}} : F_{(n_{\mathbb{N}})}$ Generalisierungsregel

(3.100.102) $F_{(n)}$ Spezialisierungsregel mit Voraus-
 setzung (2.26) Zeile 3.100.1

... Ableitungsschritte

(3.100.999) $F_{(n+1)}$ Ergebnis der Ableitungen

Induktion2-Ph-Teil1

(2.28)

(3.100) $n \in \mathbb{N} \implies F_{(n+1)}$ Phantasierregel für Voraussetzung
(2.26) Zeile 3.100.1 und (2.27)
 Zeile 3.100.999

(3.101) $\forall n : (n \in \mathbb{N} \implies F_{(n+1)})$ Generalisierungsregel

(3.102) $n_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \implies F_{(n_{\mathbb{N}}+1)}$ Spezialisierungsregel

(3.103) $n_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ Übernahme von (2.12) Zeile 1 und
 Spezialisierung von a auf n

(3.104) $F_{(n_{\mathbb{N}}+1)}$ Abtrennungsregel für Zeile 3.102
 mit Zeile 3.103

- (4) $F_{(n_{\mathbb{N}})} \implies F_{(n_{\mathbb{N}}+1)}$ Phantasierregel für Voraussetzung
(2.25) Zeile 3.1 mit (2.28) Zeile 3.104
- (5) $\forall n_{\mathbb{N}} : (F_{(n_{\mathbb{N}})} \implies F_{(n_{\mathbb{N}}+1)})$ Generalisierungsregel
- (6) $\forall n_{\mathbb{N}} : F_{(n_{\mathbb{N}})}$ Induktionsregel mit Induktionsanfang (2.24)

Das Beweisschema 1 eignet sich für kurze Beweise während das Beweisschema 2 für sehr lange Beweise günstiger ist.

Beispiel:

Zu beweisen sei diese Summenaussage:

- (1) $\forall n_{\mathbb{N}} : \left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n_{\mathbb{N}}} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{n_{\mathbb{N}}(n_{\mathbb{N}} + 1)}{2}$ vermuteter Satz
- (2) $\left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n_{\mathbb{N}}} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{n_{\mathbb{N}}(n_{\mathbb{N}} + 1)}{2}$ Spezialisierungsregel für $n_{\mathbb{N}}$

Test des Induktionsanfanges mit $n_{\mathbb{N}} = 0$:

- (3) $\left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^0 j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{0(0 + 1)}{2}$ Satz, Induktionsanfang
- (4) $0 = 0$ Auswertung auf beiden Seiten der Gleichung

Summe-Ph-Teil0

(2.32)

$$(4.1) \quad \left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n_{\mathbb{N}}} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{n_{\mathbb{N}}(n_{\mathbb{N}} + 1)}{2} \quad \begin{array}{l} \text{Voraussetzung 4.1:} \\ \text{Induktionsbehauptung} \end{array}$$

Summe-SubPh-Teil0

(2.33)

$$(4.100.1) \quad n \in \mathbb{N} \quad \begin{array}{l} \text{Voraussetzung 4.100.1:} \\ n \text{ als natürliche Zahl} \end{array}$$

Summe-SubPh-Teil1

(2.34)

(4.100.100)	$\left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n_{\mathbb{N}}} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{n_{\mathbb{N}}(n_{\mathbb{N}} + 1)}{2}$	Übernahme der Voraussetzung (2.32) Zeile 4.1
(4.100.101)	$\forall n_{\mathbb{N}} : \left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n_{\mathbb{N}}} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{n_{\mathbb{N}}(n_{\mathbb{N}} + 1)}{2}$	Generalisierungsregel
(4.100.102)	$\left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^n j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{n(n + 1)}{2}$	Spezialisierungsregel mit Voraussetzung (2.33) Zeile 4.100.1
(4.100.103)	$\left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^n j_{\mathbb{N}} \right\} + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1)$	Erweiterung $+(n + 1)$
(4.100.104)	$\left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n+1} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{2(n + 1)}{2}$	Zusammenfassung links und Erweiterung des zweiten Terms rechts mit 2
(4.100.105)	$\left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n+1} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$	Ausmultiplizierung der Klammern und Zusammenfassung rechts
(4.100.106)	$\left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n+1} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$	Zusammenfassung
(4.100.107)	$\left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n+1} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)}{2}$	Umformung

$$(4.101) \quad n \in \mathbb{N} \implies \left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n+1} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \quad \text{Phantasierregel für Voraussetzung (2.33) Zeile 4.100.1 mit (2.34) Zeile 4.100.107}$$

$$(4.102) \quad \forall n : \left(n \in \mathbb{N} \implies \left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n+1} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \right) \quad \text{Generalisierungsregel}$$

$$(4.103) \quad n_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \implies \left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n_{\mathbb{N}}+1} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{(n_{\mathbb{N}}+1)((n_{\mathbb{N}}+1)+1)}{2} \quad \text{Spezialisierungsregel}$$

$$(4.104) \quad n_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \quad \text{Übernahme von (2.12) Zeile 1 und Spezialisierung von } a \text{ auf } n$$

$$(4.105) \quad \left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n_{\mathbb{N}}+1} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{(n_{\mathbb{N}}+1)((n_{\mathbb{N}}+1)+1)}{2} \quad \text{Abtrennungsregel für die Zeilen 4.103 und 4.104}$$

$$(5) \quad \left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n_{\mathbb{N}}} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{n_{\mathbb{N}}(n_{\mathbb{N}}+1)}{2} \quad \text{Phantasierregel für Voraussetzung (2.32) Zeile 4.1 mit (2.35) Zeile 4.105}$$

$$\implies$$

$$\left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n_{\mathbb{N}}+1} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{(n_{\mathbb{N}}+1)((n_{\mathbb{N}}+1)+1)}{2}$$

$$(6) \quad \forall n_{\mathbb{N}} : \quad \text{Generalisierungsregel}$$

$$($$

$$\left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n_{\mathbb{N}}} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{n_{\mathbb{N}}(n_{\mathbb{N}}+1)}{2}$$

$$\implies$$

$$\left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n_{\mathbb{N}}+1} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{(n_{\mathbb{N}}+1)((n_{\mathbb{N}}+1)+1)}{2}$$

$$)$$

$$(7) \quad \forall n_{\mathbb{N}} : \left\{ \sum_{j_{\mathbb{N}}=0}^{n_{\mathbb{N}}} j_{\mathbb{N}} \right\} = \frac{n_{\mathbb{N}}(n_{\mathbb{N}}+1)}{2} \quad \text{Induktionsregel mit Induktionsanfang (2.31)}$$

2.1.12 Konstanten

Eine Definition eines neuen Symbols a , das einen komplizierteren konstanten Ausdruck k ersetzen soll, wird ohne Quantoren vorgenommen, sofern k ausschließlich bereits definierte konstante Ausdrücke enthält:

$$a = k$$

So führen wir beispielsweise das Symbol $\%$ als neues Zeichen ein:

$$\boxed{\text{Prozent-Def}} \tag{2.37}$$

$$\% = \frac{1}{100}$$

Da eine Konstante unabhängig von allen denkbaren Variablen ist, könnte man auf die Idee kommen, einen Satz der folgenden Art zu formulieren:

$$\forall x : \% = \frac{1}{100}$$

Das wäre eine falsche Anwendung der Generalisierungsregel, da die Variable x in der Gleichung [\(2.37\)](#) gar nicht vorkommt. Eine zulässige Anwendung ergibt sich aber in dieser Situation:

$$\boxed{\text{Prozent-Abl-Teil1}} \tag{2.38}$$

- (1) $\% = \frac{1}{100}$ Definition [\(2.37\)](#)
- (2) $x_{\mathbb{R}} \% = x_{\mathbb{R}} \frac{1}{100}$ Erweiterung mit $x_{\mathbb{R}}$
- (3) $\forall x_{\mathbb{R}} : x_{\mathbb{R}} \% = x_{\mathbb{R}} \frac{1}{100}$ Generalisierungsregel

Wenn man um $x_{\mathbb{R}}$ kürzen möchte, muss auch der Allquantor mit $x_{\mathbb{R}}$ entfallen, sobald $x_{\mathbb{R}}$ nicht mehr als Variable auftaucht:

$$\boxed{\text{Prozent-Abl-Teil2}} \quad (2.39)$$

$$(4) \quad \% = \frac{1}{100} \quad \text{Kürzung bei (2.38) Zeile 3}$$

2.1.13 Funktionen

Wenn eine Funktion $f(x_{\mathbb{R}})$ mit der reellen Variable $x_{\mathbb{R}}$ einen neuen Namen $g(x_{\mathbb{R}})$ bekommen soll, so muss die Variable $x_{\mathbb{R}}$ an den Allquantor gebunden werden:

$$\forall x_{\mathbb{R}} : g(x_{\mathbb{R}}) = f(x_{\mathbb{R}})$$

So kann beispielsweise die Exponentialfunktion durch eine Taylorreihe definiert werden:

$$\forall n : \forall x : \left((n \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{R}) \implies \left(\forall x : \exp(x) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right\} \right) \right)$$

oder:

$$\forall x_{\mathbb{R}} : \exp(x_{\mathbb{R}}) = \left\{ \sum_{n_{\mathbb{N}}=0}^{\infty} \frac{x_{\mathbb{R}}^{n_{\mathbb{N}}}}{n_{\mathbb{N}}!} \right\}$$

Solange der Parameter $x_{\mathbb{R}}$ mit dem Allquantor quantifiziert ist, kann die Angabe des Parameters entfallen, wie beispielsweise bei der Exponentialfunktion:

$$\forall x_{\mathbb{R}} : \exp = \left\{ \sum_{n_{\mathbb{N}}=0}^{\infty} \frac{x_{\mathbb{R}}^{n_{\mathbb{N}}}}{n_{\mathbb{N}}!} \right\}$$

Erst bei Anwendung der Spezialisierungsregel muss dann der spezielle Parameter angegeben werden, z.B.:

$$\exp(3) = \left\{ \sum_{n_{\mathbb{N}}=0}^{\infty} \frac{3^{n_{\mathbb{N}}}}{n_{\mathbb{N}}!} \right\}$$

2.1.14 Folgen

Eine Folge hat den frei wählbaren Parameter $n_{\mathbb{N}}$, der zu einem Symbol f als Index unten rechts in runden Klammern geschrieben wird, z.B.:

$$\forall n_{\mathbb{N}} : f_{(n_{\mathbb{N}})} = \frac{1}{n_{\mathbb{N}}!}$$

Wegen des Allquantors kann der Parameter auch weggelassen werden:

$$\forall n_{\mathbb{N}} : f = \frac{1}{n_{\mathbb{N}}!}$$

Bei einer Spezialisierung auf einen bestimmten Wert muss der Parameter angegeben werden, da nach der Spezialisierungsregel der Allquantor entfällt, z.B.:

$$f_{(69)} = \frac{1}{69!}$$

Kapitel 3

Globale Symbole

3.1 Konzept

Das Konzept dieses Axiomensystems besteht darin, dass alle in (2.7) aufgelisteten Zeichen für sich alleine noch keine Bedeutung haben. Die Bedeutung entsteht in der obersten Logikebene erst durch Zusatzsymbole oder in Phantasien durch Voraussetzungen für diese Symbole.

3.2 Einheiten

3.2.1 Imaginäre Einheit

Aus der Mathematik wird die imaginäre Einheit so definiert, dass ihr Quadrat -1 ergibt:

$$\boxed{i_{\mathbb{C}}\text{-Def}} \tag{3.1}$$

$$i_{\mathbb{C}}^2 = -1 \quad \text{imaginäre Einheit}$$

Die manchmal in der Literatur übliche Definition der imaginären Einheit als Wurzel von -1 wird hier nicht angewendet:

$$i := \sqrt{-1} \quad \text{wird nicht verwendet!}$$

Die Gefahr einer fehlerhaften Ableitung lauert im Detail, wie sie z.B. Hermann Schulz in seinem Lehrbuch anhand einer bewusst fehlerhaften Gleichungskette skizziert:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Hermann Schulz, „Physik mit Bleistift“, 2. Auflage, Springer-Verlag, S. 94

Die nachfolgende Ableitung zeigt, wie man aussagenlogisch korrekt vorgehen könnte:

$$\boxed{\text{iC-Abl1}} \tag{3.2}$$

- | | | |
|-----|--|---|
| (1) | $i_{\text{C}}^2 = -1$ | implizite Definition der imaginären Einheit (3.1) |
| (2) | $i_{\text{C}}^2 = -1 \exp(i_{\text{C}} \pi)$ | komplexe Zahlenebene |
| (3) | $i_{\text{C}}^2 = \exp(i_{\text{C}} \pi)$ | Betrag |
| (4) | $\sqrt{i_{\text{C}}^2} = \pm \exp\left(i_{\text{C}} \frac{\pi}{2}\right)$ | Quadratwurzelrelation in der komplexen Zahlenebene |
| (5) | $\sqrt{i_{\text{C}}^2} = -\exp\left(i_{\text{C}} \frac{\pi}{2}\right) \vee \sqrt{i_{\text{C}}^2} = +\exp\left(i_{\text{C}} \frac{\pi}{2}\right)$ | logische Bedeutung von \pm |
| (6) | $\sqrt{i_{\text{C}}^2} = -i_{\text{C}} \vee \sqrt{i_{\text{C}}^2} = +i_{\text{C}}$ | Euler-Formel |
| (7) | $\sqrt{-1} = -i_{\text{C}} \vee \sqrt{-1} = +i_{\text{C}}$ | Definition der imaginären Einheit (3.1) |
| (8) | $i_{\text{C}} = -\sqrt{-1} \vee i_{\text{C}} = +\sqrt{-1}$ | $\cdot(-1)$ im ersten Fall, Weglassen und Hinzufügen des Pluszeichens im zweiten Fall und Seitentausch in beiden Fällen |

Oder:

$$\boxed{\text{iC-Abl2}} \tag{3.3}$$

- | | | |
|-----|--|---|
| (1) | $i_{\text{C}}^2 = -1$ | implizite Definition der imaginären Einheit (3.1) |
| (2) | $i_{\text{C}} = \pm \sqrt{-1}$ | Quadratwurzelrelation |
| (3) | $i_{\text{C}} = -\sqrt{-1} \vee i_{\text{C}} = +\sqrt{-1}$ | logische Bedeutung von \pm |

Aus der Definition [\(3.1\)](#) lässt sich offenbar ein Satz wie $i = \sqrt{-1}$ bei korrekten Äquivalenzumformungen mit komplexen Zahlen nicht ableiten.

3.2.2 Längeneinheit und Zeiteinheit

Es werden hier zwei Symbole eingeführt, die als Einheiten für die Länge und die Zeit stehen:

$$\boxed{\text{lambda-tau-Def}} \tag{3.4}$$

(1) λ_u Längeneinheit

(2) τ_u Zeiteinheit

3.2.3 Abstrakte Einheiten

Jedes Symbol x mit dem Index u ist eine Einheit zu x :

$$\boxed{\text{u-Def}} \tag{3.5}$$

$\forall x : x_u$ ist eine Einheit zu x

3.3 Indizes

3.3.1 Allgemeine Indizes

Nach Anwendung der Spezialisierungsregel auf das Axiom [\(2.11\)](#) mit $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ ist jedes mit dem Symbol der Menge der natürlichen Zahlen indizierte Symbol eine natürliche Zahl:

$$\boxed{\text{Index-S}} \tag{3.6}$$

$\forall x : x_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$

3.3.2 Komponentenindizes

Komponentenindizes für die Komponenten dreidimensionaler Vektoren sind eine Teilmenge der natürlichen Zahlen. Das Hatschek-Zeichen generiert aus einem beliebigen Symbol ein neues Symbol für einen Komponentenindex:

$$\boxed{\text{KompIdx-Def}} \quad (3.7)$$

$$\forall x : \check{x} \in \{1, 2, 3\}$$

3.3.3 Zyklische Indizes

Zyklisches Indextripel definieren wir mit dem zusätzlichen Symbol des kleinen Kreises oberhalb eines indizierten Symbols $x_{(j\check{N})}$:

$$\boxed{\text{zyklischIdx-Def}} \quad (3.8)$$

$$\forall x : (\hat{x}_{(1)}, \hat{x}_{(2)}, \hat{x}_{(3)}) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$$

3.3.4 Zeilenindizes und Spaltenindizes

Zur Definition aller benötigten Matrizen werden Zeilenzahlen x_{Row} und Spaltenzahlen x_{Col} definiert, die ausschließlich die Werte 1 und 3 annehmen können:

$$\boxed{\text{RowCol-Def}} \quad (3.9)$$

$$(1) \quad \forall x : x_{\text{Row}} \in \{1, 3\}$$

$$(2) \quad \forall x : x_{\text{Col}} \in \{1, 3\}$$

3.4 Spezielle Mengen

3.4.1 Produkt der reellen Zahlen mit einer Einheit

Das Produkt der Menge der reellen Zahlen mit einer Einheit a_u soll durch die folgende Mengengleichung definiert sein:

$$\boxed{\text{R-u-Def}} \tag{3.10}$$

$$\forall a_u : \mathbb{R} a_u = \{\forall y : (x \in \mathbb{R} \implies y = x a_u)\}$$

Es gilt also die folgende Äquivalenz für ein Symbol z als Element der Menge $\mathbb{R} a_u$:

$$\boxed{\text{R-u-S}} \tag{3.11}$$

$$\forall a_u : (z \in \mathbb{R} a_u \iff \forall z : (x \in \mathbb{R} \implies z = x a_u))$$

Mit der Spezialisierungsregel für a_u lassen sich jeweils eine Äquivalenz für die Längeneinheit und die Zeiteinheit ableiten:

$$\boxed{\text{R-lambda-u-tau-u-S}} \tag{3.12}$$

$$(1) \quad z \in \mathbb{R} \lambda_u \iff \forall z : (x \in \mathbb{R} \implies z = x \lambda_u)$$

$$(2) \quad z \in \mathbb{R} \tau_u \iff \forall z : (x \in \mathbb{R} \implies z = x \tau_u)$$

Innerhalb einer entsprechenden Phantasie kommen wir an die Gleichung für z , z.B. mit der Längeneinheit:

$$\boxed{\mathbb{R}\text{-lambda-u-tau-u-Ph}} \tag{3.13}$$

(1.1)	$x \in \mathbb{R}$	Voraussetzung 1.1
(1.2)	$z \in \mathbb{R} \lambda_u$	Voraussetzung 1.2
(1.100)	$z \in \mathbb{R} \lambda_u \iff \forall z : (x \in \mathbb{R} \implies z = x \lambda_u)$	Übernahme der Äquivalenz (3.12) Zeile 1 nach der Übernahmeregel
(1.101)	$\forall z : (x \in \mathbb{R} \implies z = x \lambda_u)$	Abtrennungsregel für die Implikation der Äquivalenz von links nach rechts mit Voraussetzung 1.2
(1.102)	$x \in \mathbb{R} \implies z = x \lambda_u$	Spezialisierungsregel
(1.103)	$z = x \lambda_u$	Abtrennungsregel mit Voraussetzung 1.1

3.4.2 Längen und Zeiten

Die Menge der Längen (engl. „*length*“) bzw. der Zeiten (engl. „*time*“) ist die Menge der reellen Zahlen, die mit der Längeneinheit bzw. mit der Zeiteinheit nach [\(3.4\)](#) multipliziert wird:

$$\boxed{\text{LT-Def}} \tag{3.14}$$

$$(1) \quad \mathbb{L} = \mathbb{R} \lambda_u$$

$$(2) \quad \mathbb{T} = \mathbb{R} \tau_u$$

3.4.3 Funktionen und Skalarfelder

Unter Rückgriff auf die Definition der differentiell superkontinuierlichen Funktionen [\(1.1\)](#) definieren wir eine parametrisierte Menge von reellen Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen, die in jeder Variable differentiell superkontinuierlich sind:

$$\boxed{\text{Fn-Def}} \tag{3.15}$$

$$\mathbb{F}(n, x_u, f_u) =$$

$$\{$$

$$\forall n : \forall f :$$

$$($$

$$(n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1)$$

$$\implies$$

$$($$

$$f : \mathbb{R}^n x_u^n \rightarrow \mathbb{R} f_u \wedge (x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \mapsto f(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$$

$$\wedge f \text{ differentiell superkontinuierlich in allen Variablen } x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$$

$$\wedge x_u \text{ und } f_u \text{ sind beliebige Maßeinheiten}$$

$$)$$

$$)$$

$$\}$$

Dies ist die Menge aller im Zusammenhang mit der Differentialrechnung zulässigen skalaren Funktionen mit n Variablen.

Mathematische reelle Funktionen mit einer Variable sind Elemente der Menge $\mathbb{F}(1, 1, 1)$, wobei x_u und f_u jeweils einheitenlos sind.

Physikalische Skalarfelder sind der Spezialfall $\mathbb{F}(3, \lambda_u, f_u)$ mit drei Längenvariablen $x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}$ und der beliebigen Einheit der Funktionswerte f_u .

3.4.4 Skalarobjekte

Die Menge der komplexwertigen Skalarobjekte (engl. „*scalar*“) definieren wir als die Menge aller in allen Variablen $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ differentiell superkontinuierlichen komplexwertigen Funktionen unter Verwendung der Menge der reellwertigen Skalarfunktionen \mathbb{F} nach Definition [\(3.15\)](#):

$$\begin{aligned}
 & \boxed{\text{S-Def}} \tag{3.16} \\
 \mathbb{S} = & \\
 \{ & \\
 & \forall n : \forall h : \\
 & (\\
 & \quad (n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1) \\
 & \quad \Rightarrow \\
 & \quad (\exists f : \exists g : \forall (x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) : f \in \mathbb{F}(n, x_u, f_u) \wedge g \in \mathbb{F}(n, x_u, g_u) \wedge h = f + i_{\mathbb{C}} g) \\
 &) \\
 & \}
 \end{aligned}$$

Im Speziellen können f und g auch unabhängige Konstanten sein, so dass h auch jede konstante komplexe Zahl in \mathbb{C} annehmen kann. Die Menge der Skalare \mathbb{S} ist die Menge aller durch differentiell superkontinuierliche Funktionen erzeugten komplexwertigen Funktionen.

3.4.5 Skalaroperatoren

Die Menge der Skalaroperatoren sei die Menge aller Abbildungen (engl. „*mapping*“), die jedes Skalarobjekt nach Definition [\(3.16\)](#) wieder in die Menge der Skalarobjekte abbildet:

$$\begin{aligned}
 & \boxed{\text{M-Def}} \tag{3.17} \\
 \mathbb{M} = & \{\forall x : x : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}\}
 \end{aligned}$$

Hier liegt eine doppelte Bedeutung des Doppelpunktes vor, die aber nicht zu Konflikten führen dürfte: Der erste Doppelpunkt gehört zum Allquantor während der zweite Doppelpunkt zur Kennzeichnung des Definitionsbereiches und des Wertebereiches der Abbildung x dient.

3.4.6 Objekte

Alle möglichen Definitionsbereiche und Wertebereiche enthalten komplexwertige Objekte:

$$\boxed{\text{S-NRow-NCol-Def}} \tag{3.18}$$

$$\forall n_{\text{Row}} : \forall n_{\text{Col}} : \mathbb{S}^{n_{\text{Row}}, n_{\text{Col}}} \text{ ist Definitionsbereich- oder Wertebereich einer Abbildung}$$

Die speziellen komplexwertigen Strukturen werden unter Rückgriff auf die Definition der Skalarobjekte [\(3.16\)](#) vorgnommen:

$$\boxed{\text{Objektstrukuren-Def}} \tag{3.19}$$

- (1) $\mathbb{S}^{1,1} = \{\forall x : x \in \mathbb{S}\}$ Skalarobjekte
- (2) $\mathbb{S}^{1,3} = \{\forall (x_1, x_2, x_3) : \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{S}\}$ Zeilenvektorobjekte
- (3) $\mathbb{S}^{3,1} = \left\{ \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{S} \right\}$ Spaltenvektorobjekte
- (4) $\mathbb{S}^{3,3} = \left\{ \forall \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} : \{x_{1,1}, \dots, x_{3,3}\} \subset \mathbb{S} \right\}$ Matrixobjekte

3.4.7 Operatoren

Die Operatorräume definieren wir allgemein mit der Zeilenzahl n_{Row} und der Spaltenzahl n_{Col} :

$$\boxed{\text{P-NRow-NCol-Def}} \quad (3.20)$$

$$\forall n_{\text{Row}} : \forall n_{\text{Col}} : \mathbb{M}^{n_{\text{Row}}, n_{\text{Col}}} \text{ ist Operatorraum}$$

Die speziellen Operatorstrukturen werden unter Rückgriff auf die Definition der Skalaroperatoren [\(3.17\)](#) vorgenommen:

$$\boxed{\text{Operatorstrukturen-Def}} \quad (3.21)$$

- | | | |
|-----|--|-----------------------|
| (1) | $\mathbb{M}^{1,1} = \{\forall x : x \in \mathbb{M}\}$ | Skalaroperatoren |
| (2) | $\mathbb{M}^{1,3} = \{\forall (x_1, x_2, x_3) : \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{M}\}$ | Zeilenvektoperatoren |
| (3) | $\mathbb{M}^{3,1} = \left\{ \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{M} \right\}$ | Spaltenvektoperatoren |
| (4) | $\mathbb{M}^{3,3} = \left\{ \forall \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} : \{x_{1,1}, \dots, x_{3,3}\} \subset \mathbb{M} \right\}$ | Matrixoperatoren |

3.4.8 Beschränkte Funktionen

Für die Menge der im Wertebereich von a bis b beschränkten Funktionen f wird das Symbol $\mathbb{B}(a, b)$ für das englische Wort „*bounded*“ verwendet:

$$\boxed{\text{B-Menge-Def}} \tag{3.22}$$

$$\mathbb{B}(a, b) =$$

{

$$\forall n : \forall a : \forall b : \forall f :$$

(

$$(\{a, b\} \subset \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1)$$

\implies

$$(f \in \mathbb{F}(n, x_u, f_u) \wedge \forall (x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) : a \leq f(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \leq b)$$

)

}

Kapitel 4

Operatoren und Objekte

4.1 Wirkungsrichtung der Operatoren

Ein Operator soll ausschließlich auf den rechts von ihm befindenden Term wirken. Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, soll es keine Wirkung nach links geben. Die einzigen Ausnahmen sind Operatoren, die als Exponent zu einem Term geschrieben werden: das Potenzieren, das Transponieren, das komplexe Konjugieren und das Adjungieren. Diese Operatoren wirken nach links unten.

4.2 Wirkungsbereiche der Operatoren

Die nachfolgende Diskussion bezieht sich auf Skalarobjekte und Skalaroperatoren. Das Gleiche gilt dann auch für die Komponenten von Vektoren und Matrizen.

Die geschweiften Klammern $\{$ und $\}$ sollen dazu benutzt werden, um die Wirkungsbereiche der Operatoren genau festzulegen. Eine öffnende Klammer $\{$ zeigt einem Operator der nächst höheren Klammerebene an, dass dieser auf alle Terme innerhalb der unter ihm liegenden Klammerebene wirken soll. Eine schließende Klammer $\}$ begrenzt den Wirkungsbereich eines Operators, der sich innerhalb dieser Klammerebene befindet.

Ein Beispiel mit den Operatoren P, Q und den Objekten a, b, c veranschaulicht die Wirkungsweise der geschweiften Klammern:

$$\{P \{Qa\} b\} c$$

Der Operator Q wirkt ausschließlich auf das Objekt a . Der Operator P wirkt auf die Objekte $\{Qa\}$ und b . Keiner der beiden Operatoren wirkt auf c . Ohne geschweifte Klammern hätten wir einen Operator vorliegen. Wir definieren dies in weiteren zwei Axiomen für allgemeine Objekte $a_{\mathbb{S}}$, die im Definitionsbereich des Operators $P_{\mathbb{M}}$ liegen:

$$\boxed{\text{Op-Klammern-Def}} \quad (4.1)$$

$$(1) \quad \forall P_M : \forall a_S : P_M a_S \in M \quad \text{Operator}$$

$$(2) \quad \forall P_M : \forall a_S : \{P_M a_S\} \in S \quad \text{Objekt}$$

Diese Axiome sagen aus, dass die Anwendung eines Operators auf ein Objekt in der Menge der Operatoren bleibt, während der gleiche Ausdruck in geschweiften Klammern zu einem Objekt wird. Die Zeile 2 in (4.1) bedeutet auch die Abgeschlossenheit aller Operationen. Es sind nur solche Operationen erlaubt, die aus der Menge der differentiell superkontinuierlichen Funktionen keine nicht differentiell superkontinuierlichen Funktionen erzeugen.

Wenn ein Objekt zusätzlich geschweift geklammert wird, hat dies keine Auswirkung auf seine Eigenschaften:

$$\boxed{\text{Obj-mitKlammern-Def}} \quad (4.2)$$

$$\forall a_S : \{a_S\} = a_S$$

Ein weiteres Beispiel zeigt den Unterschied der für Operatoren wirkungsbereichsbegrenzende Klammern und für Operatoren transparente Klammern, falls die Distributivität gilt:

$$(Pa + b)c = Pac + bc$$

Der Term in den runden operatortransparenten Klammern ist selbst wieder ein Operator, der auf das Objekt c wirkt. Die Symbole a und b müssen in dieser Situation als Multiplikationsoperatoren ($a \cdot$) und ($b \cdot$) aufgefasst werden, da diese Symbole auf das Objekt c treffen. Nach der Anwendung der Distributivitätsregel erhalten wir den Operator Pac und das Objekt bc .

Anders sieht die folgende Situation aus:

$$\{Pa + b\}c = \{\{Pa\} + b\}c = \{Pa\}c + bc$$

Der Operator P findet in den wirkungsbereichsbegrenzenden geschweiften Klammern ausschließlich den Operand a vor. Deshalb wurde in einem ersten Schritt Pa geschweift geklammert und stellt damit ein Objekt dar. Im zweiten Schritt wurde dann die Distributivitätsregel angewendet. Der Gesamtausdruck besteht also aus einer Summe von zwei Objekten.

Aus dem Axiom (4.1) Zeile 2 und dem Axiom (4.2) erhalten wir die Aussage, dass bei doppelten geschweiften Klammern ein Klammerpaar weggelassen werden darf:

$$\boxed{\text{DoppelteKlammern-S}} \quad (4.3)$$

$$\forall P_M : \forall a_S : \{\{P_M a_S\}\} = \{P_M a_S\}$$

Im folgenden Axiom definieren wir, wann geschweifte Klammern gesetzt werden sollen:

$$\boxed{\text{DoppelteKlammernPlus-Def}} \quad (4.4)$$

$$\forall P_M : \forall a_S : \forall b_S : \{P_M a_S + b_S\} = \{\{P_M a_S\} + b_S\}$$

Mit den Axiomen (4.1) Zeile 2 und (4.2) kann daraus dann dieser Satz abgeleitet werden:

$$\boxed{\text{DoppelteKlammernPlus-S}} \quad (4.5)$$

$$\forall P_M : \forall a_S : \forall b_S : \{P_M a_S + b_S\} = \{P_M a_S\} + b_S$$

Zwei aufeinanderfolgend geschriebene Operatoren PQ bedeuten deren verkettete Anwendung. Zwei aufeinanderfolgend geschriebene Skalarobjekte bedeuten deren Produkt. Für alle Skalarobjekte gelten u.a. die Axiome zur Assoziativität, Kommutativität und Distributivität bezüglich der beiden Verknüpfungen Multiplikation \cdot und Addition $+$. Jedes Skalarobjekt kann im Zusammenhang mit einem entsprechenden Verknüpfungszeichen als Operator aufgefasst werden:

$$\boxed{\text{MulOp-AddOp-Def}} \quad (4.6)$$

$$(1) \quad \forall a_S : (a_S \cdot) : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

$$(2) \quad \forall a_S : (a_S +) : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$$

Die Beziehung der Menge \mathbb{S} der Skalarobjekte nach [\(3.16\)](#) zu der Menge \mathbb{M} der Skalaroperatoren nach [\(3.17\)](#) wird in den folgenden drei Aussagen zusammengefasst:

MulOp-AddOp-S

(4.7)

- | | | |
|-----|--|--|
| (1) | $\forall a_{\mathbb{S}} : \sim a_{\mathbb{S}} \in \mathbb{M}$ | Skalarobjekte sind keine Skalaroperatoren, s. (2.11) und dem noch folgenden Satz (4.16) |
| (2) | $\forall a_{\mathbb{S}} : (a_{\mathbb{S}} \cdot) \in \mathbb{M}$ | Multiplikationsoperatoren sind Skalaroperatoren nach Definitionen (4.6) Zeile 1 und (3.17) |
| (3) | $\forall a_{\mathbb{S}} : (a_{\mathbb{S}} +) \in \mathbb{M}$ | Additionsoperatoren sind Skalaroperatoren nach Definitionen (4.6) Zeile 2 und (3.17) |

4.3 Objektaxiome

Für alle Skalarobjekte gelten zusätzlich die folgenden arithmetischen Axiome:

Obj-Axiome-Def

(4.8)

- | | | |
|------|---|---|
| (1) | $\forall a_S : \forall b_S : (a_S \cdot) b_S = a_S b_S$ | Weglassung des Multiplikationszeichens und der Klammerung |
| (2) | $\forall a_S : \forall b_S : (a_S +) b_S = a_S + b_S$ | Weglassung der Klammerung |
| (3) | $\forall a_S : \forall b_S : \forall c_S : a_S (b_S + c_S) = a_S b_S + a_S c_S$ | Distributivität |
| (4) | $\forall a_S : \forall b_S : \forall c_S : a_S (b_S c_S) = (a_S b_S) c_S$ | Assoziativität |
| (5) | $\forall a_S : \forall b_S : a_S + b_S = b_S + a_S$ | Kommutativität bzgl. + |
| (6) | $\forall a_S : \forall b_S : a_S b_S = b_S a_S$ | Kommutativität bzgl. · |
| (7) | $\forall a_S : (0+) a_S = a_S$ | neutrales Element bzgl. + |
| (8) | $\forall a_S : (1 \cdot) a_S = a_S$ | neutrales Element bzgl. · |
| (9) | $\forall a_S : ((-a_S) +) a_S = 0$ | inverses Element bzgl. + |
| (10) | $\forall a_S : \forall b_S : a_S - b_S = ((-b_S) +) a_S$ | Subtraktion |
| (11) | $\forall a_S : (a_S \neq 0 \implies (a_S^{-1} \cdot) a_S = 1)$ | inverses Element bzgl. · |
| (12) | Nullelement | |
| (13) | $\forall a_S : (a_S) = \{a_S\}$ | runde und geschweifte Klammern, s.a. <u>(4.2)</u> |

4.4 Operatoraxiome

Für alle Skalaroperatoren gelten zusätzlich die folgenden arithmetischen Axiome:

Op-Axiome-Def		(4.9)
(1)	$\forall P_M : \forall Q_M : \forall R_M : P_M (Q_M + R_M) = P_M Q_M + P_M R_M$	Distributivität
(2)	$\forall P_M : \forall Q_M : \forall R_M : P_M (Q_M R_M) = (P_M Q_M) R_M$	Assoziativität
(3)	$\forall P_M : \forall Q_M : P_M + Q_M = Q_M + P_M$	Kommutativität bzgl. +
(4)	$\forall P_M : P_M + (0 \cdot) = P_M$	neutrales Element bzgl. +, Nullelement
(5)	$\forall P_M : P_M + (-P_M) = (0 \cdot)$	inverses Element bzgl. +
(6)	$\forall P_M : \forall Q_M : P_M - Q_M = P_M + (-Q_M)$	Subtraktion
(7)	$\forall P_M : \forall a_S : a_S P_M = (a_S \cdot) P_M$	Objekt und Operator, s. Def. (4.7) Zeile 2
(8)	$\forall P_M : \forall a_S : P_M a_S = P_M (a_S \cdot)$	Operator und Objekt, s. Def. (4.7) Zeile 2
(9)	$\forall P_M : (1 \cdot) P_M = P_M (1 \cdot) = P_M$	Einsoperator
(10)	$\forall P_M : (0 \cdot) P_M = P_M (0 \cdot) = (0 \cdot)$	Nulloperator
(11)	$\exists P_M : \exists Q_M : \sim P_M Q_M = Q_M P_M$	Es gibt nicht kommutative Operatorpaare

Runde Klammern schränken den Wirkungsbereich von Operatoren nicht ein, d.h. sie sind für Operatoren transparent:

rundeKlammern-Def		(4.10)
$\forall P_M : (P_M) = P_M$		

Ein Operator ohne Operand in geschweiften Klammern ist ein Nullobjekt:

$$\boxed{\text{Null-Op-Def}} \quad (4.11)$$

$$\forall P_M : \{P_M\} = 0$$

Durch diese formale Unterscheidung der runden Klammern zu den geschweiften Klammern ist es möglich, Operatoren zu definieren, die sich aus anderen Operatoren additiv zusammensetzen. In den folgenden zwei Zeilen definieren wir die Abgeschlossenheit der Addition und der Verkettung von zwei Skalaroperatoren:

$$\boxed{\text{Abgeschlossenheit-Operatoren-Def}} \quad (4.12)$$

$$(1) \quad \forall P_M : \forall Q_M : (P_M + Q_M) \in M$$

$$(2) \quad \forall P_M : \forall Q_M : (P_M Q_M) \in M$$

Das folgende Axiom legt das Verhalten einer formalen Summe aus einem Skalaroperator und einem Skalarobjekt fest:

$$\boxed{\text{op-plus-obj-Def}} \quad (4.13)$$

$$\forall P_M : \forall a_S : P_M + a_S = P_M + (a_S \cdot)$$

Jedes Skalarobjekt in einer formalen Summe, in der mindestens ein Skalaroperator auftritt, wird zu einem skalaren Multiplikationsoperator.

4.5 Hybridsymbole für Operatoren und Objekte

Für viele Definitionen ist es praktisch, ein Symbol zu verwenden, das entweder als Objekt oder als Operator interpretiert werden kann. Dazu verwenden wir das Zirkumflexzeichen als Zusatz zu einem Buchstaben:

Objekt-Operator-Def (4.14)

$$\forall a : ((\hat{a} \in \mathbb{S} \wedge \hat{a} \notin \mathbb{M}) \vee (\hat{a} \notin \mathbb{S} \wedge \hat{a} \in \mathbb{M}))$$

Diese Definition kann auch mit Hilfe der de–Morgan–Regeln aus der ODER–Tabelle (1.5.2) und der Äquivalenz als UND–Verknüpfung der Implikationen für beide Richtungen als eine Antivalenz „Entweder ... oder ...“ (exklusives ODER) formuliert werden:

Objekt-Operator-Abl (4.15)

- | | | |
|-----|---|---|
| (1) | $(\hat{a} \in \mathbb{S} \wedge \hat{a} \notin \mathbb{M}) \vee (\hat{a} \notin \mathbb{S} \wedge \hat{a} \in \mathbb{M})$ | Spezialisierungsregel für (4.14) für das Symbol a und Weglassung der äußeren Klammern |
| (2) | $(\hat{a} \in \mathbb{S} \wedge \sim \hat{a} \in \mathbb{M}) \vee (\sim \hat{a} \in \mathbb{S} \wedge \hat{a} \in \mathbb{M})$ | ...nicht Element von... |
| (3) | $\sim (\sim (\hat{a} \in \mathbb{S} \wedge \sim \hat{a} \in \mathbb{M}) \wedge \sim (\sim \hat{a} \in \mathbb{S} \wedge \hat{a} \in \mathbb{M}))$ | de–Morgan–Regel aus ODER–Tabelle (1.5.2) Spalte 1 |
| (4) | $\sim ((\sim \hat{a} \in \mathbb{S} \vee \sim \hat{a} \in \mathbb{M}) \wedge (\sim \hat{a} \in \mathbb{S} \vee \sim \hat{a} \in \mathbb{M}))$ | de–Morgan–Regel aus ODER–Tabelle (1.5.2) Spalte 1 |
| (5) | $\sim ((\sim \hat{a} \in \mathbb{S} \vee \hat{a} \in \mathbb{M}) \wedge (\hat{a} \in \mathbb{S} \vee \sim \hat{a} \in \mathbb{M}))$ | doppelte Verneinungen |
| (6) | $\sim ((\hat{a} \in \mathbb{S} \implies \hat{a} \in \mathbb{M}) \wedge (\hat{a} \in \mathbb{M} \implies \hat{a} \in \mathbb{S}))$ | ODER–Tabelle (1.5.2) Spalten 2 und 3 |
| (7) | $\sim (\hat{a} \in \mathbb{S} \iff \hat{a} \in \mathbb{M})$ | Äquivalenz als Implikationen für beide Richtungen |

Mit der Generalisierungsregel für das Symbol \hat{a} erhalten wir:

Objekt-Operator-S (4.16)

$$\forall \hat{a} : \sim (\hat{a} \in \mathbb{S} \iff \hat{a} \in \mathbb{M})$$

Kapitel 5

Vektoren in Dirac–Notation

5.1 Vektortypen

Für die nachfolgenden Definitionen werden überwiegend die Hybridsymbole zur Zusammenfassung von Objekten und Operatoren nach Definition [\(4.14\)](#) verwendet.

5.1.1 Typenlose Vektoren

typenlose-Vektoren-Def

(5.1)

- (1) $\forall a : \vec{a}_S$ ist ein typenloses Vektorobjekt
- (2) $\forall a : \vec{a}_M$ ist ein typenloser Vektoroperator
- (3) $\forall a : \hat{a}$ ist ein typenloses Vektorobjekt bzw. typenloser Vektoroperator

Ein typenloser Vektor ist weder Zeilenvektor noch Spaltenvektor. Die Bezeichnung \hat{a} dient zur Herstellung namentlicher Beziehungen zwischen den nachfolgenden Definitionen von Zeilenvektoren, Spaltenvektoren und Vektorproduktmatrizen.

5.1.2 Zeilenvektoren

Zeilenvektoren-Def

(5.2)

- (1) $\forall \hat{a} : \sim \left(\langle \hat{a} | \in \mathbb{S}^{1,3} \iff \langle \hat{a} | \in \mathbb{M}^{1,3} \right)$ Zeilenvektorobjekt bzw. Zeilenvektoroperator
- (2) $\forall \hat{a} : \langle \hat{a} | = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$ Komponentendarstellung

5.1.3 Spaltenvektoren

Spaltenvektoren-Def

(5.3)

- (1) $\forall \hat{a} : \sim \left(|\hat{a}\rangle \in \mathbb{S}^{3,1} \iff |\hat{a}\rangle \in \mathbb{M}^{3,1} \right)$ Spaltenvektorobjekt bzw. Spaltenvektoroperator
- (2) $\forall \hat{a} : |\hat{a}\rangle = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix}$ Komponentendarstellung

5.1.4 Verknüpfung der Vektortypen

Die Zeilenvektoren und die Spaltenvektoren werden durch das Transponieren miteinander in Beziehung gesetzt:

trpket-trpbra-Def

(5.4)

- (1) $\forall \hat{a} : |\hat{a}\rangle^T = \langle \hat{a} |$ transponierter Spaltenvektor
- (2) $\forall \hat{a} : \langle \hat{a} |^T = |\hat{a}\rangle$ transponierter Zeilenvektor

Diese beiden geschlossenen Formeln definieren für Vektoren die Operation des Transponierens. Bei zweifacher Anwendung des Transponierens erhalten wir jeweils die Identität des ursprünglichen Vektors:

trptrpket-Abl

(5.5)

- (1) $\forall \hat{a} : |\hat{a}\rangle^T = \langle \hat{a}|$ transponierter Spaltenvektor (5.4), Zeile 1
- (2) $\forall \hat{a} : |\hat{a}\rangle^{TT} = \langle \hat{a}|^T$ beide Seiten transponieren
- (3) $\forall \hat{a} : |\hat{a}\rangle^{TT} = \langle \hat{a}|$ transponierter Zeilenvektor (5.4), Zeile 2

und

trptrpbra-Abl

(5.6)

- (1) $\forall \hat{a} : \langle \hat{a}|^T = |\hat{a}\rangle$ transponierter Zeilenvektor (5.4), Zeile 2
- (2) $\forall \hat{a} : \langle \hat{a}|^{TT} = |\hat{a}\rangle^T$ beide Seiten transponieren
- (3) $\forall \hat{a} : \langle \hat{a}|^{TT} = |\hat{a}\rangle$ transponierter Spaltenvektor (5.4), Zeile 1

5.2 Vektoraddition

Die Addition zweier Vektoren ist nur entweder mit zwei Zeilenvektoren oder mit zwei Spaltenvektoren möglich und wird durch Addition der korrespondierenden Komponenten durchgeführt:

Vektoraddition-Def

(5.7)

$$(1) \quad \forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \langle \hat{a}| + \langle \hat{b}| = (\hat{a}_1 + \hat{b}_1, \hat{a}_2 + \hat{b}_2, \hat{a}_3 + \hat{b}_3) \quad \text{Zeilenvektoraddition}$$

$$(2) \quad \forall \hat{a} : \forall \hat{b} : |\hat{a}\rangle + |\hat{b}\rangle = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 + \hat{b}_1 \\ \hat{a}_2 + \hat{b}_2 \\ \hat{a}_3 + \hat{b}_3 \end{pmatrix} \quad \text{Spaltenvektoraddition}$$

5.3 Vektoren in Aufzählungslisten

Die Bezeichnung \vec{a}_S bezieht sich auf eine dreidimensionale Größe, die eine Zeilenvektordarstellung $\langle \vec{a}_S |$ sowie eine Spaltenvektordarstellung $|\vec{a}_S\rangle$ hat. Die physikalische Größe \vec{a}_S hat die Komponenten a_{S1}, a_{S2}, a_{S3} . Diese typenlose Darstellung \vec{a}_S ist nur in Aufzählungen, z.B. als Parameterangabe einer Funktion, z.B. $f(\vec{a}_S, \vec{b}_S, \vec{c}_S, \dots)$, oder an den Quantoren \forall, \exists erlaubt.

Wenn eine Verschiebung einer Funktion oder die Umskalierung eines Argumentes einer Funktion gewünscht ist, müssen zuerst neue Vektoren in Zeilenvektor– oder Spaltenvektordarstellung definiert werden, um diese dann als Argumente in typenloser Schreibweise aufzuzählen, z.B.:

$$\boxed{\text{Vektor-Ph}} \quad (5.8)$$

$$(1.1) \quad \forall \vec{a}_S : \forall \vec{b}_S : |\vec{a}_S\rangle = |\vec{a}_S\rangle - |\vec{b}_S\rangle \quad \text{Voraussetzung 1.1}$$

$$(1.2) \quad \forall \vec{a}_S : \forall s_S : |\vec{e}_S\rangle = |\vec{a}_S\rangle s_S \quad \text{Voraussetzung 1.2}$$

Die Funktion f mit Argumentenliste könnte dann beispielsweise wie folgt aussehen: $f(\vec{a}_S, \vec{e}_S, \vec{c}_S, \dots)$

5.4 Einheitsvektoren

Die drei orthogonalen Einheitsvektoren im dreidimensionalen kartesischen Raum haben die folgenden Zeilenvektor– bzw. Spaltenvektordarstellungen:

$$\boxed{\text{Einheitsvektoren-Def}} \quad (5.9)$$

$$(1) \quad \langle \vec{e}_1 | = (1, 0, 0) \wedge \langle \vec{e}_2 | = (0, 1, 0) \wedge \langle \vec{e}_3 | = (0, 0, 1)$$

$$(2) \quad |\vec{e}_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge |\vec{e}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge |\vec{e}_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.5 Ortsvektor

Der Ortsvektor in kartesischen Koordinaten wird mit indizierbaren x -Werten definiert:

$$\boxed{\text{Ortsvektor-Def}} \tag{5.10}$$
$$|\vec{x}\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{L}$$

5.6 Parameterregeln

Die Regeln zur Weglassung der Parameter werden in den folgenden Axiomen zusammengefasst:

$$\boxed{\text{Parameter-Def}} \tag{5.11}$$

- (1) $\forall f_{\mathbb{S}} : \forall \vec{x} : f_{\mathbb{S}} = f_{\mathbb{S}}(\vec{x})$ Skalarfelder
- (2) $\forall \vec{f}_{\mathbb{S}} : \forall \vec{x} : \vec{f}_{\mathbb{S}} = \vec{f}_{\mathbb{S}}(\vec{x})$ Vektorfelder
- (3) $\forall f_{\mathbb{S}} : \forall n_{\mathbb{N}} : f_{\mathbb{S}} = f_{\mathbb{S}(n_{\mathbb{N}})}$ Folgen
- (4) $\forall \vec{f}_{\mathbb{S}} : \forall n_{\mathbb{N}} : \vec{f}_{\mathbb{S}} = \vec{f}_{\mathbb{S}(n_{\mathbb{N}})}$ Vektorfolgen
- (5) $\forall f_{\mathbb{S}} : \forall x_{\mathbb{S}} : f_{\mathbb{S}} = f_{\mathbb{S}}(x_{\mathbb{S}})$ Funtkionen

5.7 Skalarprodukt (Inneres Produkt)

Bei der Berechnung des Skalarproduktes werden die Komponenten des Zeilenvektors mit den Komponenten des Spaltenvektors gleicher Indizes ohne komplexe Konjugation multipliziert und summiert:

$$\boxed{\text{Skalarprodukt-Def}} \quad (5.12)$$

$$\forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \langle \hat{a} | \hat{b} \rangle = \langle \hat{a} | | \hat{b} \rangle = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3) \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 \hat{a}_j \hat{b}_j$$

Der Verzicht auf die komplexe Konjugation des ersten Vektors an dieser Stelle ist eigene Konvention. Sie taucht erst bei der Definition des Betragsquadrates [\(5.16\)](#) auf.

5.8 Dyadisches Produkt

Bei zwei dreikomponentigen Vektoren ergibt das Dyadenprodukt eine 3×3 -Matrix:

$$\boxed{\text{Dyaden-Def}} \quad (5.13)$$

$$\forall \hat{a} : \forall \hat{b} : |\hat{a}\rangle\langle\hat{b}| = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \hat{b}_1 & \hat{a}_1 \hat{b}_2 & \hat{a}_1 \hat{b}_3 \\ \hat{a}_2 \hat{b}_1 & \hat{a}_2 \hat{b}_2 & \hat{a}_2 \hat{b}_3 \\ \hat{a}_3 \hat{b}_1 & \hat{a}_3 \hat{b}_2 & \hat{a}_3 \hat{b}_3 \end{pmatrix}$$

In der bisherigen Vektroanalysis gibt es ein Problem, wenn Zeilenvektoren und Spaltenvektoren nicht sorgfältig voneinander unterschieden werden:

$$\exists \hat{a} : \exists \hat{b} : \exists \hat{c} : \hat{a} (\hat{b}\hat{c}) \neq (\hat{a}\hat{b}) \hat{c}$$

Diese vermeintliche Ungültigkeit der Assoziativität bezüglich des Skalarproduktes erübrigt sich unter Verwendung der Vektoren in Dirac–Notation:

Assoziativität-S

(5.14)

$$\forall \hat{a} : \hat{b} : \hat{c} : |\hat{a}\rangle \langle \hat{b} | \hat{c} \rangle = \left(|\hat{a}\rangle \langle \hat{b} | \right) | \hat{c} \rangle$$

Auf der linken Seite der Gleichung wird in den Klammern zuerst das Skalarprodukt $\langle \hat{b} | \hat{c} \rangle$ berechnet, auf der rechten Seite der Gleichung wird zuerst das dyadische Produkt $|\hat{a}\rangle \langle \hat{b} |$ berechnet.

Die Schwierigkeit in der herkömmlichen Notation liegt darin, dass die mathematische Vektor–Matrix–Struktur verloren geht und somit die operative Verknüpfung zwischen den ersten beiden Vektoren \hat{a} und \hat{b} nur dann als Dyadenprodukt erkannt werden kann, wenn man dafür innerhalb der herkömmlichen Notation ein neues Operatorsymbol benutzt.

In dieser Dirac–Notation sind wegen der Assoziativität von Matrizenprodukten beliebig lange Ketten von Vektoren möglich, die mittendrin wohldefinierte mathematische Strukturen, nämlich Skalare oder Matrizen, enthalten:

Vektorketten

(5.15)

$$(1) \quad \forall \hat{a} : \hat{b} : \hat{c} : \hat{d} : \hat{e} : \hat{f} : \langle \hat{a} | \hat{b} \rangle \langle \hat{c} | \hat{d} \rangle \langle \hat{e} | \hat{f} \rangle \text{ ist ein Skalar}$$

$$(2) \quad \forall \hat{a} : \hat{b} : \hat{c} : \hat{d} : \hat{e} : \hat{f} : |\hat{a}\rangle \langle \hat{b} | \hat{c} \rangle \langle \hat{d} | \hat{e} \rangle \langle \hat{f} | \text{ ist eine Matrix}$$

$$(3) \quad \forall \hat{a} : \hat{b} : \hat{c} : \hat{d} : \hat{e} : |\hat{a}\rangle \langle \hat{b} | \hat{c} \rangle \langle \hat{d} | \hat{e} \rangle \text{ ist ein Spaltenvektor}$$

$$(4) \quad \forall \hat{a} : \hat{b} : \hat{c} : \hat{d} : \hat{e} : \langle \hat{a} | \hat{b} \rangle \langle \hat{c} | \hat{d} \rangle \langle \hat{e} | \text{ ist ein Zeilenvektor}$$

Wegen der Assoziativität von Matrixprodukten können die Operatoren zwischen den Enden der Vektorketten entweder als Skalare oder als Matrizen interpretiert werden. In der Rechenpraxis zeigt sich, dass Skalarprodukte und Dyadenprodukte in gleicher Häufigkeit vorkommen und einen gleichwertigen Beitrag zu den Gleichungen liefern.

5.9 Betragsquadrat

Das Betragsquadrat eines komplexen 3-dimensionalen Vektors \hat{a} wird wie folgt gebildet:

$$\boxed{\text{Betragsquadrat-Def}} \quad (5.16)$$

$$(1) \quad \forall \hat{a} : |\hat{a}|^2 = \langle \hat{a}^* | \hat{a} \rangle$$

$$(2) \quad \forall \hat{a} : |\hat{a}|^2 = \sum_{j=1}^3 \hat{a}_j^* \hat{a}_j$$

Die Quadratwurzelfunktion kann dazu führen, dass ein Objekt entsteht, das nicht differentiell superkontinuierlich ist und nicht mehr Element unserer Menge der Skalarfunktionen im Sinn der Definition [\(3.15\)](#) ist:

$$\exists \vec{a} : |\vec{a}| \notin \mathbb{F}$$

Zum Beispiel ist der Betrag des Ortsvektor \vec{x} im Nullpunkt nicht nach x_1, x_2, x_3 differenzierbar und deshalb nicht differentiell superkontinuierlich:

$$(1) \quad \forall \vec{x} : |\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle} \quad \text{herkömmlicher Betrag eines Vektors}$$

$$(2) \quad \forall \vec{x} : |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \text{Skalarprodukt [\(5.12\)](#)}$$

$$(3) \quad |\vec{x}| \notin \mathbb{F} \quad \text{vgl. Definition [\(3.15\)](#)}$$

Wenn nach der Anwendung einer Operation ein nicht differentiell superkontinuierliches Objekt entstanden ist, darf kein Differentialoperator mehr auf ein solches Objekt angewendet werden! Oder anders formuliert: Die Quadratwurzeloperation kann bzgl. der Menge der differentiell superkontinuierlichen Funktionen nicht abgeschlossen sein. Sie ist aber für jedes \vec{x} abgeschlossen, wenn die Null nicht im Radikant der Wurzel auftauchen kann, z.B.:

$$\boxed{\text{sqrt-S}} \quad (5.17)$$

$$\varepsilon_{\mathbb{R}} > 0 \implies \forall \vec{x} : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \varepsilon_{\mathbb{R}}^2} \in \mathbb{F}$$

5.10 Vektorkomponenten

Die Vektorkomponenten lassen sich durch Skalarprodukte mit den Einheitsvektoren extrahieren:

$$\boxed{\text{Vektorkomponenten-Abl}} \quad (5.18)$$

$$(1) \quad \forall \hat{a} : \forall \check{j} : \hat{a}_{\check{j}} = \langle \vec{e}_{\check{j}} | \hat{a} \rangle \quad \text{Definitionen } \underline{(5.3)}, \underline{(5.9)}, \underline{(5.12)}$$

$$(2) \quad \forall \hat{a} : \forall \check{j} : \hat{a}_{\check{j}} = \langle \hat{a} | \vec{e}_{\check{j}} \rangle \quad \text{Definitionen } \underline{(5.2)}, \underline{(5.9)}, \underline{(5.12)}$$

5.11 Matrizen

Matrizen werden mit einem Unterstrich unter dem nackten Symbolbuchstaben gekennzeichnet:

$$\boxed{\text{Matrix-Def}} \quad (5.19)$$

$$(1) \quad \forall a : \sim \quad (\underline{\hat{a}} \in \mathbb{S}^{3,3} \iff \underline{\hat{a}} \in \mathbb{M}^{3,3})$$

$$(2) \quad \forall \underline{\hat{a}} : \underline{\hat{a}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{1,1} & \hat{a}_{1,2} & \hat{a}_{1,3} \\ \hat{a}_{2,1} & \hat{a}_{2,2} & \hat{a}_{2,3} \\ \hat{a}_{3,1} & \hat{a}_{3,2} & \hat{a}_{3,3} \end{pmatrix} \quad \text{Komponentendarstellung}$$

5.12 Einheitsmatrix

Die Einheitsmatrix wird mit dem Symbol \underline{e} bezeichnet:

$$\boxed{\text{eMatrix-Def}} \tag{5.20}$$

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.13 Kronecker-Delta

Für alle natürlichen Zahlen $j_{\mathbb{N}}, k_{\mathbb{N}}$ wird das Kroneckersymbol definiert:

$$\boxed{\text{Kronecker-Def}} \tag{5.21}$$

$$\forall j_{\mathbb{N}} : \forall k_{\mathbb{N}} : \delta_{(j_{\mathbb{N}}, k_{\mathbb{N}})} = \begin{cases} 1 & : j_{\mathbb{N}} = k_{\mathbb{N}} \\ 0 & : j_{\mathbb{N}} \neq k_{\mathbb{N}} \end{cases}$$

Wenn wir die Indizes per Voraussetzung auf die drei Koordinatenindizes beschränken, erhalten wir eine Beziehung zu den Skalarprodukten der Einheitsvektoren:

$$\boxed{\text{Kronecker-Ph}} \tag{5.22}$$

$$(1.1) \quad \{j, k\} \subset \{1, 2, 3\} \quad \text{Voraussetzung (Phantasie)}$$

$$(1.100) \quad \delta_{(j,k)} = \langle \vec{e}_j | \vec{e}_k \rangle \quad \text{Definitionen (5.9), (5.12), (5.21)}$$

Mit Hilfe der Phantasierregel kann dann der folgende Satz erzeugt werden:

- | | | |
|-----|---|---|
| (2) | $\{j, k\} \subset \{1, 2, 3\} \implies \delta_{(j,k)} = \langle \vec{e}_j \vec{e}_k \rangle$ | Phantasierregel für (5.22) Zeilen 1.1 und 1.100 |
| (3) | $\forall j : \forall k : (\{j, k\} \subset \{1, 2, 3\} \implies \delta_{(j,k)} = \langle \vec{e}_j \vec{e}_k \rangle)$ | Generalisierungsregel für j und k |
| (4) | $(\{\check{j}, \check{k}\} \subset \{1, 2, 3\} \implies \delta_{(\check{j}, \check{k})} = \langle \vec{e}_{\check{j}} \vec{e}_{\check{k}} \rangle)$ | Spezialisierungsregel für j und k |
| (5) | $\{\check{j}, \check{k}\} \subset \{1, 2, 3\}$ | nach Definition der Komponentenindizes (3.7) |
| (6) | $\delta_{(\check{j}, \check{k})} = \langle \vec{e}_{\check{j}} \vec{e}_{\check{k}} \rangle$ | Abtrennungsregel für Zeilen 4 und 5 |
| (7) | $\forall \check{j} : \forall \check{k} : \delta_{(\check{j}, \check{k})} = \langle \vec{e}_{\check{j}} \vec{e}_{\check{k}} \rangle$ | Generalisierungsregel für \check{j} und \check{k} |

5.14 Einheitsteilmatrix

Wir definieren den neuen Begriff der Einheitsteilmatrix mit genau einer Komponente mit der Zahl 1 auf der Hauptdiagonale, wobei alle anderen Komponenten 0 sind, und führen ein neues Symbol dafür ein:

$$\boxed{\text{Einheitsteilmatrizen-Def}} \tag{5.23}$$

$$\forall \check{j} : \underline{e}_{\check{j}} = |\vec{e}_{\check{j}}\rangle \langle \vec{e}_{\check{j}}|$$

Die konkreten Einheitsteilmatrizen sind:

$$\boxed{\text{Einheitsteilmatrizen-S}} \tag{5.24}$$

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.15 Matrixkomponente

Um eine Matrixkomponente einer Matrix \hat{a} zu erhalten, definieren wir einen neuen Operator, der ein Skalar liefert:

$$\boxed{\text{MatrixKomp-Def}} \quad (5.25)$$

$$\forall \hat{a} : \forall \check{j} : \forall \check{k} : \diamond_{\check{j},\check{k}} \hat{a} = \langle \vec{e}_{\check{j}} | \hat{a} | \vec{e}_{\check{k}} \rangle$$

5.16 Einkomponentenmatrix

Eine Einkomponentenmatrix, die nur aus genau einer bestimmten Komponente einer Matrix \hat{a} besteht, definieren wir wie unter Verwendung der Einheitsteilmatrizen [\(5.23\)](#):

$$\boxed{\text{Einkomponentenmatrix-Def}} \quad (5.26)$$

$$\forall \hat{a} : \forall \check{j} : \forall \check{k} : \square_{\check{j},\check{k}} \hat{a} = \vec{e}_{\check{j}} \hat{a} \vec{e}_{\check{k}}$$

5.17 Matrizenaddition

Die Addition zweier Matrizen wird durch die Addition der jeweils korrespondierenden Komponenten durchgeführt:

$$\boxed{\text{Matrizen-Addition-Def}} \quad (5.27)$$

$$\forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \hat{a} + \hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{1,1} + \hat{b}_{1,1} & \hat{a}_{1,2} + \hat{b}_{1,2} & \hat{a}_{1,3} + \hat{b}_{1,3} \\ \hat{a}_{2,1} + \hat{b}_{2,1} & \hat{a}_{2,2} + \hat{b}_{2,2} & \hat{a}_{2,3} + \hat{b}_{2,3} \\ \hat{a}_{3,1} + \hat{b}_{3,1} & \hat{a}_{3,2} + \hat{b}_{3,2} & \hat{a}_{3,3} + \hat{b}_{3,3} \end{pmatrix}$$

5.18 Zeilen und Spalten einer Matrix

Eine Matrix kann auch entweder als ein Tripel von Zeilenvektoren oder als ein Tripel von Spaltenvektoren interpretiert werden. Dazu definieren wir erst einmal die Zeilenvektoren und die Spaltenvektoren einer Matrix:

$$\boxed{\text{Matrix-Vektortripel-Def}} \quad (5.28)$$

$$(1) \quad \forall \underline{\hat{a}} : \forall \check{n} \quad \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_{\check{n}} | = \sum_{j=1}^3 \hat{a}_{\check{n},j} \langle \vec{e}_j | \quad \text{Zeilenvektor } \check{n}$$

$$(2) \quad \forall \underline{\hat{a}} : \forall \check{n} \quad | \underline{\hat{a}}, \mathbf{C}_{\check{n}} \rangle = \sum_{j=1}^3 | \vec{e}_j \rangle \hat{a}_{j,\check{n}} \quad \text{Spaltenvektor } \check{n}$$

Der zweite symbolische Parameter $\mathbf{R}_{\check{n}}$ bzw. $\mathbf{C}_{\check{n}}$ ist notwendig, um zwischen den Zeilenkomponenten und den Spaltenkomponenten der Matrix zu unterscheiden, denn es gilt nur bei symmetrischen Matrizen die Identität der Komponenten eines Zeilenvektors mit den Komponenten des entsprechenden Spaltenvektors gleicher Nummer:

$$\boxed{\text{SymmetrieImplikation-S}} \quad (5.29)$$

$$\forall \underline{\hat{a}} : \left(\underline{\hat{a}}^T = \underline{\hat{a}} \implies \forall \check{n} : \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_{\check{n}} |^T = | \underline{\hat{a}}, \mathbf{C}_{\check{n}} \rangle \right)$$

Mit Hilfe der Zeilenvektoren und Spaltenvektoren können die Matrizen als entsprechende geordnete Vektortripel dargestellt werden:

$$\boxed{\text{Matrix-Vektortripel-S}} \quad (5.30)$$

$$(1) \quad \forall \underline{\hat{a}} : \underline{\hat{a}} = \begin{pmatrix} \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_1 | \\ \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_2 | \\ \langle \underline{\hat{a}}, \mathbf{R}_3 | \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \forall \underline{\hat{a}} : \underline{\hat{a}} = (| \underline{\hat{a}}, \mathbf{C}_1 \rangle, | \underline{\hat{a}}, \mathbf{C}_2 \rangle, | \underline{\hat{a}}, \mathbf{C}_3 \rangle)$$

5.19 Matrizenmultiplikation

Die Matrizenmultiplikation kann jetzt mit dem Begriff des Skalarproduktes aus den Zeilenvektoren und den Spaltenvektoren zweier Matrizen definiert werden:

$$\boxed{\text{MatrizenMul-Def}} \tag{5.31}$$

$$\forall \underline{\hat{a}} : \forall \underline{\hat{b}} : \underline{\hat{a}} \underline{\hat{b}} = \begin{pmatrix} \langle \underline{\hat{a}}, R_1 | \underline{\hat{b}}, C_1 \rangle & \langle \underline{\hat{a}}, R_1 | \underline{\hat{b}}, C_2 \rangle & \langle \underline{\hat{a}}, R_1 | \underline{\hat{b}}, C_3 \rangle \\ \langle \underline{\hat{a}}, R_2 | \underline{\hat{b}}, C_1 \rangle & \langle \underline{\hat{a}}, R_2 | \underline{\hat{b}}, C_2 \rangle & \langle \underline{\hat{a}}, R_2 | \underline{\hat{b}}, C_3 \rangle \\ \langle \underline{\hat{a}}, R_3 | \underline{\hat{b}}, C_1 \rangle & \langle \underline{\hat{a}}, R_3 | \underline{\hat{b}}, C_2 \rangle & \langle \underline{\hat{a}}, R_3 | \underline{\hat{b}}, C_3 \rangle \end{pmatrix}$$

5.20 Multiplikation von Matrizen mit Vektoren

Ein Zeilenvektor darf nur links neben einer Matrix und ein Spaltenvektor darf nur rechts neben einer Matrix stehen:

$$\boxed{\text{Matrix-und-Vektor-Def}} \tag{5.32}$$

$$(1) \quad \forall \underline{\hat{a}} : \forall \underline{\hat{b}} : \underline{\hat{a}} \underline{\hat{b}} = (\langle \underline{\hat{a}} | \underline{\hat{b}}, C_1 \rangle, \langle \underline{\hat{a}} | \underline{\hat{b}}, C_2 \rangle, \langle \underline{\hat{a}} | \underline{\hat{b}}, C_3 \rangle) \quad \text{Zeilenvektor}$$

$$(2) \quad \forall \underline{\hat{a}} : \forall \underline{\hat{b}} : \underline{\hat{b}} \underline{\hat{a}} = \begin{pmatrix} \langle \underline{\hat{b}}, R_1 | \underline{\hat{a}} \rangle \\ \langle \underline{\hat{b}}, R_2 | \underline{\hat{a}} \rangle \\ \langle \underline{\hat{b}}, R_3 | \underline{\hat{a}} \rangle \end{pmatrix} \quad \text{Spaltenvektor}$$

5.21 Diagonalskalarmatrix

Jede 3×3 -Matrix \hat{a} kann als eine Summe von dyadischen Produkten geschrieben werden:

$$\boxed{\text{Matrix-Dyadensumme-S}} \quad (5.33)$$

$$\forall \hat{a} : \hat{a} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 |\vec{e}_j\rangle \hat{a}_{j,k} \langle \vec{e}_k|$$

Nach unserem Dirac-Formalismus ist es nicht erlaubt, ein Skalar an die Strichseite eines Vektors zu setzen; er muss immer an die Spitze eines Vektors geschrieben werden. Wegen der möglichen Dyadendarstellung einer Matrix ist es nicht erlaubt, ein Skalar direkt links oder rechts neben einer Matrix zu setzen. Wir benötigen deshalb eine Spezialdefinition für die Multiplikation eines Skalars mit einer Matrix. Dazu wird aus dem Skalar eine Matrix erzeugt, die nur in den Hauptdiagonaleinträgen das Skalar enthält:

$$\boxed{\text{Diagonalskalarmatrix-Def}} \quad (5.34)$$

$$\forall \hat{u} : [\hat{u}] = \sum_{j=1}^3 |\vec{e}_j\rangle \hat{u} \langle \vec{e}_j|$$

Die Darstellung mit den einzelnen Komponenten ist:

$$\boxed{\text{Diagonalskalarmatrix-S}} \quad (5.35)$$

$$\forall \hat{u} : [\hat{u}] = \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{u} \end{pmatrix}$$

Nun ist es auch möglich, einen Skalaroperator U_M formal korrekt auf einen Spaltenvektor $|\vec{a}_S\rangle$ wirken zu lassen, indem aus ihm nach dieser Vorschrift eine Diagonalmatrix erzeugt wird. Wir erhalten damit den Operator $[U_M] |\vec{a}_S\rangle$ bzw. das Objekt $\{[U_M] |\vec{a}_S\rangle\}$.

Die Multiplikation eines Skalaroperators U_M zur Matrix \underline{a}_S erfolgt durch $\underline{a}_S [U_M]$ bzw. $[U_M] \underline{a}_S$, je nachdem ob der Operator auf die Matrixkomponenten wirken soll oder nicht.

Als Spezialfall ist [1] mit Definition [\(5.20\)](#) die Einsmatrix:

$$\boxed{\text{eMatrix-S}} \tag{5.36}$$

$$[1] = \underline{e}$$

5.22 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Die Vektorproduktmatrix bezüglich eines dreikomponentigen Vektors \hat{a} wird wie folgt definiert:

$$\boxed{\text{Vektorproduktmatrix-Def}} \tag{5.37}$$

$$\forall \hat{a} : [\hat{a} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{a}_3 & \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 & 0 & -\hat{a}_1 \\ -\hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Vektorproduktmatrix ist antisymmetrisch:

$$\boxed{\text{Antisymmetrie-S}} \tag{5.38}$$

$$\forall \hat{a} : [\hat{a} \times]^T = -[\hat{a} \times]$$

Im Allgemeinen sind die Komponenten zweier Vektoren \hat{a} und \hat{b} untereinander paarweise nicht kommutativ. Die Anwendung der aus den Komponenten des Vektors \hat{a} gebildete Vektorproduktmatrix auf den Vektor \hat{b} als Spaltenvektor ergibt:

$$\boxed{\text{a-Kreuz-b-S}} \tag{5.39}$$

$$\forall \hat{a} : \forall \hat{b} : [\hat{a} \times] \hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{a}_2 \hat{b}_3 - \hat{a}_3 \hat{b}_2 \\ \hat{a}_3 \hat{b}_1 - \hat{a}_1 \hat{b}_3 \\ \hat{a}_1 \hat{b}_2 - \hat{a}_2 \hat{b}_1 \end{pmatrix}$$

Soll das Ergebnis ein Zeilenvektor sein, so muss die Kreuzproduktmatrix aus den Komponenten des Vektors \hat{b} gebildet werden, und der Vektor \hat{a} muss als Zeilenvektor auf diese Matrix wirken:

$$\boxed{\text{a-b-Kreuz-S}} \tag{5.40}$$

$$\forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \langle \hat{a} | [\hat{b} \times] = (\hat{a}_2 \hat{b}_3 - \hat{a}_3 \hat{b}_2, \hat{a}_3 \hat{b}_1 - \hat{a}_1 \hat{b}_3, \hat{a}_1 \hat{b}_2 - \hat{a}_2 \hat{b}_1)$$

Damit erhalten wir die folgende Beziehung für alle Vektorenpaare, auch wenn deren Komponenten paarweise nicht kommutativ sind:

$$\boxed{\text{a-Kreuz-b-Trp-S}} \tag{5.41}$$

$$\forall \hat{a} : \forall \hat{b} : [\hat{a} \times] \hat{b} = \left(\langle \hat{a} | [\hat{b} \times] \right)^T$$

5.22.1 Antikommutativität

Durch die Definition der Kreuzproduktmatrix ergibt sich eine gewisse Antikommutativität bei Vertauschung der Vektoren \hat{a} und \hat{b} , falls jede Komponente des einen Vektors mit jeder Komponente des anderen Vektors kommutativ ist:

$$\boxed{\text{Antikommutativitaet-Ph}} \quad (5.42)$$

$$(1.1) \quad \forall \check{j} : \forall \check{k} : \hat{a}_{\check{j}} \hat{b}_{\check{k}} = \hat{b}_{\check{k}} \hat{a}_{\check{j}} \quad \text{Voraussetzung: Kommutativität}$$

$$(1.100) \quad [\hat{a} \times] |\hat{b}\rangle = - [\hat{b} \times] |\hat{a}\rangle \quad \text{Folgerung}$$

$$\boxed{\text{Antikommutativitaet-S}} \quad (5.43)$$

$$(\forall \check{j} : \forall \check{k} : \hat{a}_{\check{j}} \hat{b}_{\check{k}} = \hat{b}_{\check{k}} \hat{a}_{\check{j}}) \implies [\hat{a} \times] |\hat{b}\rangle = - [\hat{b} \times] |\hat{a}\rangle \quad \text{Phantasieregel für (5.42) Zeilen 1.1 und 1.100}$$

Wenn wir statt der allgemeinen Vektorsymbole \hat{a}, \hat{b} die Vektorobjekte \vec{a}_S, \vec{b}_S betrachten, dann gilt die Antikommutativität wegen der Kommutativität von zwei beliebigen Skalarobjekten allgemein:

$$\boxed{\text{Antikommutativitaet-S}} \quad (5.44)$$

$$\forall \vec{a}_S : \forall \vec{b}_S : [\vec{a}_S \times] |\vec{b}_S\rangle = - [\vec{b}_S \times] |\vec{a}_S\rangle$$

5.23 Spur einer Matrix

Die Spur einer quadratischen Matrix \hat{a} wird wie folgt definiert:

$$\boxed{\text{Spur-Def}} \quad (5.45)$$

$$\forall \hat{a} : \text{trace } \hat{a} = \sum_{\check{j}=1}^3 \langle \vec{e}_{\check{j}} | \hat{a} | \vec{e}_{\check{j}} \rangle$$

5.24 Skalarmultiplikation mit Vektoren

Die Multiplikation eines Spaltenvektors mit einem Skalar und die Multiplikation eines Skalars mit einem Zeilenvektor wird in den folgenden beiden Axiomen definiert:

Vektor-Skalar-Mul-Def

(5.46)

$$(1) \quad \forall \hat{a} : \forall \hat{u} : |\hat{a}\rangle\hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \hat{u} \\ \hat{a}_2 \hat{u} \\ \hat{a}_3 \hat{u} \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \forall \hat{a} : \forall \hat{u} : \hat{u}\langle\hat{a}| = (\hat{u}\hat{a}_1, \hat{u}\hat{a}_2, \hat{u}\hat{a}_3)$$

Jedes Skalar kann durch ein Skalarprodukt dargestellt werden. Wenn wir beispielsweise das Skalar mit $\hat{u} = \langle\hat{b}|\hat{c}\rangle$ wählen, dann erhalten wir:

ket-Skalar-Ph

(5.47)

$$(3.1) \quad \forall \hat{b} : \forall \hat{c} : \hat{u} = \langle\hat{b}|\hat{c}\rangle \quad \text{Voraussetzung 3.1}$$

$$(3.100) \quad \forall \hat{b} : \forall \hat{c} : |\hat{a}\rangle\hat{u} = |\hat{a}\rangle\langle\hat{b}|\hat{c}\rangle \quad \text{Anmultiplizieren eines Spaltenvektors}$$

$$(3.101) \quad \forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \forall \hat{c} : |\hat{a}\rangle\hat{u} = |\hat{a}\rangle\langle\hat{b}|\hat{c}\rangle \quad \text{Generalisierungsregel}$$

ket-Skalar-Impl-S

(5.48)

$$(4) \quad \left(\forall \hat{b} : \forall \hat{c} : \hat{u} = \langle\hat{b}|\hat{c}\rangle \right) \implies \left(\forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \forall \hat{c} : |\hat{a}\rangle\hat{u} = |\hat{a}\rangle\langle\hat{b}|\hat{c}\rangle \right) \quad \text{Phantasierregel für (5.47) Zeilen 3.1 und 3.101}$$

Wegen der Assoziativität von Matrizenprodukten kann entweder das Skalarprodukt $\langle\hat{b}|\hat{c}\rangle$ oder das dyadische Produkt $|\hat{a}\rangle\langle\hat{b}|$ zuerst berechnet werden. Hätten wir \hat{u} vor den Spaltenvektor gesetzt, würden wir die zweite Möglichkeit optisch nicht sofort erkennen. Das gleiche gilt für Zeilenvektoren entsprechend:

$$(4.1) \quad \forall \hat{b} : \forall \hat{c} : \hat{u} = \langle \hat{b} | \hat{c} \rangle \quad \text{Voraussetzung 4.1}$$

$$(4.100) \quad \forall \hat{b} : \forall \hat{c} : \hat{u} \langle \hat{a} | = \langle \hat{b} | \hat{c} \rangle \langle \hat{a} | \quad \text{Anmultiplizieren eines Zeilenvektors}$$

$$(4.101) \quad \forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \forall \hat{c} : \hat{u} \langle \hat{a} | = \langle \hat{b} | \hat{c} \rangle \langle \hat{a} | \quad \text{Generalisierungsregel}$$

$$(5) \quad \left(\forall \hat{b} : \forall \hat{c} : \hat{u} = \langle \hat{b} | \hat{c} \rangle \right) \implies \left(\forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \forall \hat{c} : \hat{u} \langle \hat{a} | = \langle \hat{b} | \hat{c} \rangle \langle \hat{a} | \right) \quad \text{Phantasieregel für (5.49) Zeilen 4.1 und 4.101}$$

Hier darf das Skalar nicht hinter dem Zeilenvektor stehen. Deshalb soll eine Grundregel für die Konstellationen von Dirac-Vektoren lauten:

Vektoren dürfen nur entweder Spitze an Spitze oder Strich an Strich gesetzt werden.

5.25 Konstellationen

Skalare \hat{u}, \hat{v} , Vektoren \hat{a}, \hat{b} und Matrizen \hat{c}, \hat{d} sollen nur in folgenden Konstellationen erlaubt sein, um wohlgeformte Terme zu bilden:

$$\text{Skalare} \quad : \quad \hat{u} \hat{v} \quad , \quad \langle \hat{a} | \hat{b} \rangle$$

$$\text{Matrizen} \quad : \quad \hat{c} \hat{d} \quad , \quad |\hat{a}\rangle \langle \hat{b}|$$

$$\text{Zeilenvektoren} \quad : \quad \hat{u} \langle \hat{a} | \quad , \quad \langle \hat{a} | \hat{c}$$

$$\text{Spaltenvektoren} \quad : \quad |\hat{a}\rangle \hat{u} \quad , \quad \hat{c} |\hat{a}\rangle$$

5.26 Skalierte Kreuzproduktmatrizen und Vektoren

Den Zusammenhang zwischen skalierten Kreuzproduktmatrizen und skalierten Vektoren beschreiben die folgenden zwei Axiome:

Mat-Vek-skaliert-Def

(5.51)

$$(1) \quad (\forall \hat{a} : \forall \hat{u} : [\hat{b} \times] = [\hat{a} \times][\hat{u}]) \iff (\forall \hat{a} : \forall \hat{u} : |\hat{b}\rangle = |\hat{a}\rangle \hat{u})$$

$$(2) \quad (\forall \hat{a} : \forall \hat{u} : [\hat{b} \times] = [\hat{u}][\hat{a} \times]) \iff (\forall \hat{a} : \forall \hat{u} : \langle \hat{b} | = \hat{u} \langle \hat{a} |)$$

5.27 Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen

Wenden wir die Vektorproduktmatrixdefinition (5.37) auf die drei Einheitsvektoren an, so erhalten wir nach der Spezialisierungsregel Matrizen, die wir als Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen bezeichnen können:

e-Kreuz-S

(5.52)

$$[\vec{e}_1 \times] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge [\vec{e}_2 \times] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge [\vec{e}_3 \times] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese drei Matrizen stellen eine Basis für alle Kreuzproduktmatrizen dar. Mit drei zyklischen Indizes $\hat{n}_{(1)}, \hat{n}_{(2)}, \hat{n}_{(3)}$ nach Definition (3.8) ergeben sich die folgenden Beziehungen:

en1en2en3-S

(5.53)

$$\forall \hat{n}_{(1)} : \forall \hat{n}_{(2)} : \forall \hat{n}_{(3)} : \quad [\vec{e}_{\hat{n}_{(1)}} \times]^T [\vec{e}_{\hat{n}_{(1)}} \times] = [\vec{e}_{\hat{n}_{(1)}} \times] [\vec{e}_{\hat{n}_{(1)}} \times]^T = |\vec{e}_{\hat{n}_{(2)}}\rangle \langle \vec{e}_{\hat{n}_{(2)}}| + |\vec{e}_{\hat{n}_{(3)}}\rangle \langle \vec{e}_{\hat{n}_{(3)}}|$$

Die konkreten Matrizen sind:

e1e2e3-S

(5.54)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad [\vec{e}_1 \times]^T [\vec{e}_1 \times] &= [\vec{e}_1 \times] [\vec{e}_1 \times]^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 (2) \quad [\vec{e}_2 \times]^T [\vec{e}_2 \times] &= [\vec{e}_2 \times] [\vec{e}_2 \times]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 (3) \quad [\vec{e}_3 \times]^T [\vec{e}_3 \times] &= [\vec{e}_3 \times] [\vec{e}_3 \times]^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Bei einem Produkt zweier unterschiedlichen Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen folgt:

en1en2-S

(5.55)

$$\forall \hat{n}_{(1)} : \forall \hat{n}_{(2)} : [\vec{e}_{\hat{n}_{(1)}} \times] [\vec{e}_{\hat{n}_{(2)}} \times] = |\vec{e}_{\hat{n}_{(2)}} \rangle \langle \vec{e}_{\hat{n}_{(1)}}|$$

Die konkreten Matrizen enthalten jeweils nur eine Komponente:

e12e23e31-S

(5.56)

$$\begin{aligned} (1) \quad [\vec{e}_1 \times] [\vec{e}_2 \times] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (2) \quad [\vec{e}_2 \times] [\vec{e}_3 \times] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (3) \quad [\vec{e}_3 \times] [\vec{e}_1 \times] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eine weitere Beziehung ist:

Summe-ejej-S

(5.57)

$$\left\{ \sum_{j=1}^3 [\vec{e}_j \times]^T [\vec{e}_j \times] \right\} = [2] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Spuren der folgenden Matrizenprodukte rechtfertigen die Bezeichnung der Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen als eine Basis zu allen Kreuzproduktmatrizen:

$$\boxed{\text{trace-en1en2-S}} \quad (5.58)$$

$$(1) \quad \forall \hat{n}_{(1)} : \left\{ \text{trace} \left[\vec{e}_{\hat{n}_{(1)}} \times \right]^T \left[\vec{e}_{\hat{n}_{(1)}} \times \right] \right\} = 2 \quad \text{s. zyklische Indizes (3.8)}$$

$$(2) \quad \forall \hat{n}_{(1)} : \forall \hat{n}_{(2)} : \left\{ \text{trace} \left[\vec{e}_{\hat{n}_{(1)}} \times \right] \left[\vec{e}_{\hat{n}_{(2)}} \times \right] \right\} = 0 \quad \text{s. zyklische Indizes (3.8)}$$

5.28 Basiszerlegung von Vektorproduktmatrizen

Bei jedem Vektor \hat{a} kann die dazugehörige Kreuzproduktmatrix $[\hat{a} \times]$ mit den zyklischen Indizes $\hat{n}_{(1)}, \hat{n}_{(2)}, \hat{n}_{(3)}$ und den Einheitsteilmatrizen von (5.24) in eine dazu gehörende Basis zerlegt werden:

$$\boxed{\text{Kreuzproduktbasis-Def}} \quad (5.59)$$

$$\forall \hat{n}_{(1)} : \forall \hat{n}_{(2)} : \forall \hat{n}_{(3)} : \forall \hat{a} : \left[\hat{a}_{\hat{n}_{(1)}} \times \right] = \underline{e}_{\hat{n}_{(2)}} \left[\hat{a} \times \right] \underline{e}_{\hat{n}_{(3)}} + \underline{e}_{\hat{n}_{(3)}} \left[\hat{a} \times \right] \underline{e}_{\hat{n}_{(2)}}$$

Die konkreten Matrizen sind:

aKreuz-Basis-S

(5.60)

$$\begin{aligned} (1) \quad \forall \hat{a} : [\hat{a}_1 \times] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{a}_1 \\ 0 & \hat{a}_1 & 0 \end{pmatrix} \\ (2) \quad \forall \hat{a} : [\hat{a}_2 \times] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \hat{a}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\hat{a}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (3) \quad \forall \hat{a} : [\hat{a}_3 \times] &= \begin{pmatrix} 0 & -\hat{a}_3 & 0 \\ \hat{a}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.29 Drehmatrizen

Die drei Drehmatrizen für aktive Drehungen um die Achse \vec{e}_n um den Winkel $\varphi_{\mathbb{R}}$ lauten:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{aktive-Drehmatrizen-Def}} \\
 (1) \quad \forall \varphi_{\mathbb{R}} : \odot_{1,\varphi_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_{\mathbb{R}}) & -\sin(\varphi_{\mathbb{R}}) \\ 0 & \sin(\varphi_{\mathbb{R}}) & \cos(\varphi_{\mathbb{R}}) \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um } \vec{e}_1\text{-Achse} \\
 (2) \quad \forall \varphi_{\mathbb{R}} : \odot_{2,\varphi_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{\mathbb{R}}) & 0 & \sin(\varphi_{\mathbb{R}}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_{\mathbb{R}}) & 0 & \cos(\varphi_{\mathbb{R}}) \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um } \vec{e}_2\text{-Achse} \\
 (3) \quad \forall \varphi_{\mathbb{R}} : \odot_{3,\varphi_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{\mathbb{R}}) & -\sin(\varphi_{\mathbb{R}}) & 0 \\ \sin(\varphi_{\mathbb{R}}) & \cos(\varphi_{\mathbb{R}}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um } \vec{e}_3\text{-Achse}
 \end{array} \tag{5.61}$$

5.30 Drehmatrizen und Vektorproduktmatrizen

Wenn wir den speziellen Drehwinkel $\varphi_{\mathbb{R}} = \frac{\pi}{2}$ wählen, erhalten wir die folgenden speziellen Drehmatrizen:

piHalbe-Drehmatrizen-S

(5.62)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \odot_{1, \frac{\pi}{2}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 (2) \quad \odot_{2, \frac{\pi}{2}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 (3) \quad \odot_{3, \frac{\pi}{2}} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ein Blick auf die Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen (5.52) und die Einheitsteilmatrizen (5.24) zeigt die Beziehungen zu den speziellen Drehmatrizen unter Verwendung des Komponentenindex \check{n} :

piHalbe-Drehmatrizen-en1-S

(5.63)

$$\forall \check{n} : \odot_{\check{n}, \frac{\pi}{2}} = [\vec{e}_{\check{n}} \times] + \underline{e}_{\check{n}}$$

Kapitel 6

Spezielle Operatoren

6.1 Differentialableitungsoperatoren

6.1.1 Globales Differential: Steigungsfunktion

Zunächst definieren wir mit unserem globalen Symbolvorrat die Wirkungsweise eines Differentialableitungsoperators:

$$\boxed{\text{globales-Differential-Def}} \tag{6.1}$$

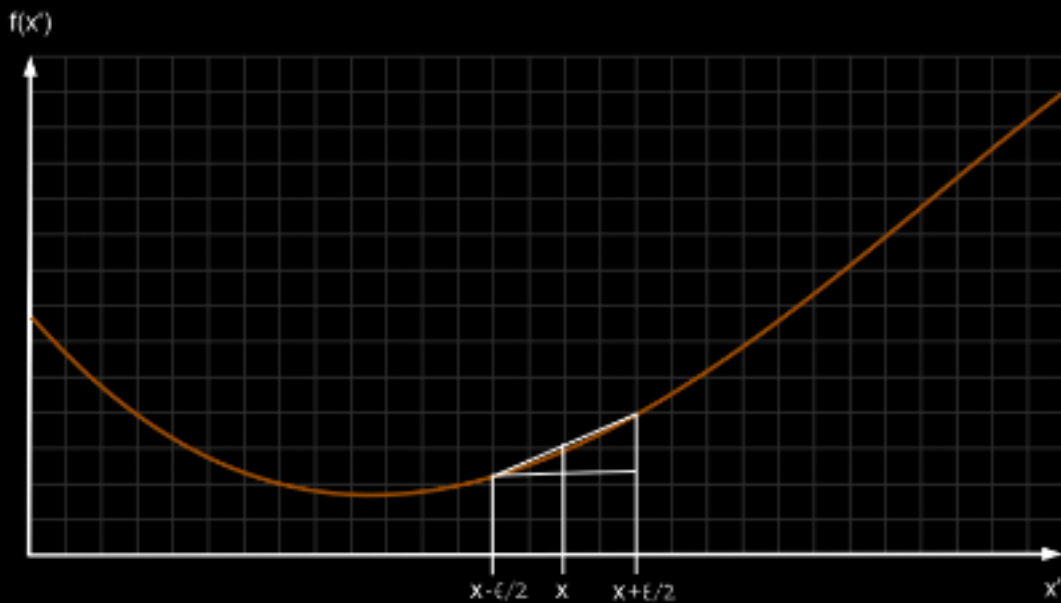
$\forall \varepsilon : \forall f : \forall x :$

$$\left((f \in \mathbb{F}(1, x_u, f_u) \wedge \{x, \varepsilon\} \subset \mathbb{R}_{x_u} \wedge \varepsilon > 0) \implies \{\partial_x f\} = \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(f\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) - f\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right) \right\} \right)$$

Dieser Operator ∂_x formt eine Funktion formal so um, dass die abgeleitete Funktion entsteht. Die bisher übliche Definition ist unsymmetrisch in der Umgebung von x :

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (f(x + \varepsilon) - f(x))$$

Die eigene Definition (6.1) lässt sich wegen der symmetrischen Definition um den Punkt x besser auf numerische Maschinen anwenden, da der entsprechende Differenzenquotient gleichmäßiger zu beiden Seiten vom Punkt x abweicht:



6.1.2 Lokales Differential: Örtliche Steigung

Um die Differentialableitung an einem festen Punkt x' ausdrücken zu können, führen wir einen weiteren Operator mit zwei Parametern ein, der zum Einen die formale Differentialableitung einer Funktion nach der Variablen x bildet und zum Anderen anschließend einen festen Punkt x' einsetzt:

$$\boxed{\text{lokales-Differential-Def}} \tag{6.2}$$

$$\forall f : \forall x' : \forall x : ((f \in \mathbb{F}(1, x_u, f_u) \wedge \{x, x'\} \subset \mathbb{R} \cdot x_u) \implies \{\partial_{x,x'} f\} = \{\partial_x f\}(x'))$$

Die bisher übliche Schreibweise wird verworfen, da nicht explizit erkennbar ist, nach welcher Variable abgeleitet werden soll:

$$f^{(m)}(x') \text{ und } f'(x') \quad \text{Ableitung nach welcher Variable?}$$

6.1.3 Taylorentwicklungsoperator

Der Taylorentwicklungsoperator kann nun bezüglich einer Funktion f mit der Variable x und des Entwicklungspunktes x' wie folgt definiert werden:

$$\boxed{\text{Taylorentwicklung-Def}} \tag{6.3}$$

$$\forall n : \forall f : \forall x' : \forall x :$$

$$\left((f \in \mathbb{F}(1, x_u, f_u) \wedge \{x, x'\} \subset \mathbb{R}_{x_u} \wedge n \in \mathbb{N}) \implies \{\mathcal{T}_{x, x'} f\} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x - x')^n \{\partial_{x, x'}^n f\} \right\} \right)$$

Der erste Index des Operators $\mathcal{T}_{x, x'}$ kennzeichnet die betreffende Variable der Funktion, der zweite Index kennzeichnet den Entwicklungspunkt bezüglich dieser Variable.

6.1.4 Zeitentwicklungsoperator

Wenn x aus der Definition der Taylorentwicklung [\(6.3\)](#) als eine Zeitvariable interpretiert wird, dann erhalten wir einen Zeitentwicklungsoperator:

$$\boxed{\text{Zeitentwicklungsoperator-S}} \tag{6.4}$$

$$\forall n : \forall f : \forall t' : \forall t :$$

$$\left((f \in \mathbb{F}(1, t_u, f_u) \wedge \{t, t'\} \subset \mathbb{T} \wedge n \in \mathbb{N}) \implies \{\mathcal{T}_{t, t'} f\} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t - t')^n \{\partial_{t, t'}^n f\} \right\} \right)$$

6.1.5 Ortsentwicklungsoperator

Wenn x aus der Definition der Taylorentwicklung (6.3) als eine Ortsvariable interpretiert wird, dann erhalten wir einen Ortsentwicklungsoperator:

$$\boxed{\text{Ortsentwicklungsoperator-S}} \tag{6.5}$$

$$\forall n : \forall f : \forall x' : \forall x :$$

$$\left((f \in \mathbb{F}(1, x_u, f_u) \wedge \{x, x'\} \subset \mathbb{L} \wedge n \in \mathbb{N}) \implies \{\mathcal{T}_{x,x'} f\} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x - x')^n \{\partial_{x,x'}^n f\} \right\} \right)$$

6.2 Integraloperatoren

6.2.1 Lokales Integral: Fläche

Ein lokales Integral ist ein „bestimmtes Integral“, also eine konkrete Fläche innerhalb eines konkreten Intervalls:

$$\boxed{\text{lokales-Integral-Def}} \tag{6.6}$$

$$\forall j : \forall n : \forall f : \forall a : \forall b :$$

(

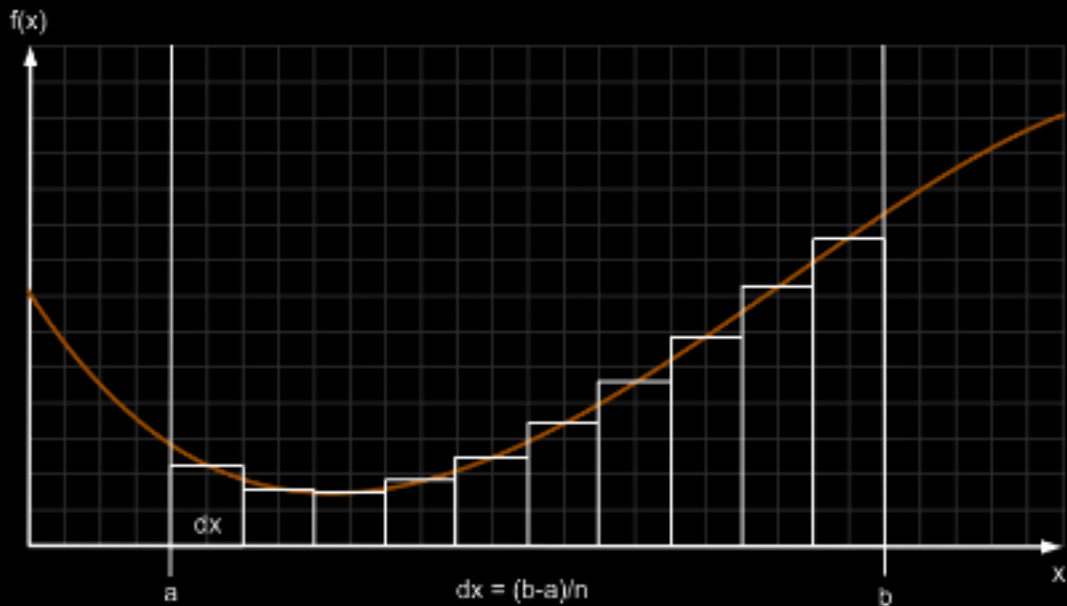
$$(f \in \mathbb{F}(1, x_u, f_u) \wedge \{a, b\} \subset \mathbb{R} x_u \wedge \{j, n\} \subset \mathbb{N})$$

\implies

$$\left\{ \int_a^b dx f \right\} = \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \left(a + \left(\frac{1}{2} + j \right) \frac{b-a}{n} \right) \right\}$$

)

Dieser Ansatz liefert einen mittleren Wert zwischen Obersumme und Untersumme:



6.2.2 Globales Integral: Stammfunktion

Ein globales Integral ist ein „*unbestimmtes Integral*“, also eine Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion f . In diesem Operator werden die Integrationsvariable x und zusätzlich die Anfangsbedingung bzw. Startbedingung s für den Punkt Null angegeben:

globales-Integral-Def

(6.7)

$$\forall s : \forall f : \forall x : \forall x' :$$

(

$$(f \in \mathbb{F}(1, x_u, f_u) \wedge \{x, x'\} \subset \mathbb{R} x_u \wedge s \in \mathbb{R} f_u x_u)$$

\Rightarrow

$$\{\mathcal{F}_s(x) f\} = \left\{ \int_0^x dx' f(x') \right\} + s \wedge s = \{\mathcal{F}_s(x) f\} (0)$$

)

Dieser Stammfunktionsoperator liefert ein Integral mit den speziellen Grenzen 0 und x , wobei die lokale Integrationsvariable x' eingeführt worden ist. Die physikalische Einheit des Anfangswertes s ist um eine Potenz der Einheit der Integrationsvariable x größer.

Der Allquantor zum Anfangswert s bedeutet, dass bei jedem beliebig gewählten Anfangswert s der Term auf der rechten Seite eine Stammfunktion der Funktion f darstellt. Bei Anwendung der Spezialisierungsregel erhalten wir das „*unbestimmte Integral*“ in gewohnter Form, wenn wir s auf den Wert 0 spezialisieren:

$$\boxed{\text{unbestimmtes-Integral-Abl}} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} & \forall f : \forall x : \forall x' : \\ & (\\ & \quad (f \in \mathbb{F}(1, x_u, f_u) \wedge \{x, x'\} \subset \mathbb{R} x_u \wedge 0 \in \mathbb{R} f_u x_u) \\ & \quad \Rightarrow \\ & \quad \{\mathcal{H}(x) f\} = \left\{ \int_0^x dx' f(x') \right\} + 0 \wedge 0 = \{\mathcal{H}(x) f\}(0) \\ &) \end{aligned}$$

Die Aussage $0 \in \mathbb{R} f_u x_u$ ist immer wahr und ist ein neutrales Element bzgl. der logischen UND-Verknüpfung. Zusammengefasst ergibt sich:

$$\boxed{\text{unbestimmtes-Integral-S}} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} & \forall f : \forall x : \forall x' : \\ & (\\ & \quad (f \in \mathbb{F}(1, x_u, f_u) \wedge \{x, x'\} \subset \mathbb{R} x_u) \\ & \quad \Rightarrow \\ & \quad \{\mathcal{H}(x) f\} = \left\{ \int_0^x dx' f(x') \right\} \wedge 0 = \{\mathcal{H}(x) f\}(0) \\ &) \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Stammfunktionsoperators kann ein lokales Integral nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wie folgt ausgedrückt werden, da sich der Anfangswert s aufhebt:

$$\boxed{\text{HDI-S}} \tag{6.10}$$

$$\forall s : \forall f : \forall a : \forall b :$$

$$($$

$$(f \in \mathbb{F}(1, x_u, f_u) \wedge \{a, b\} \subset \mathbb{R}_{x_u} \wedge s \in \mathbb{R}_{f_u x_u})$$

$$\implies$$

$$\left\{ \int_a^b dx f \right\} = \{ \mathcal{F}_s(x) f \} (b) - \{ \mathcal{F}_s(x) f \} (a)$$

$$)$$

6.3 Nabla-Operator

Der Nabla-Operator wird nun in die Dirac-Notation für dreidimensionale Vektoren in Form von Vektoroperatoren eingebettet:

$$\boxed{\text{Nabla-Def}} \tag{6.11}$$

$$(1) \quad \forall \vec{x} : \langle \vec{\nabla} | = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}) \quad \text{Zeilenvektoroperator}$$

$$(2) \quad \forall \vec{x} : | \vec{\nabla} \rangle = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \quad \text{Spaltenvektoroperator}$$

$$(3) \quad \forall \vec{x} : [\vec{\nabla} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{x_3} & \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} & 0 & -\partial_{x_1} \\ -\partial_{x_2} & \partial_{x_1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Kreuzproduktmatrixoperator}$$

6.4 Gradient

Der Gradient ist ein Operator, der aus einem Skalarobjekt $u(\vec{x})$ einen Spaltenvektor erzeugen kann, wenn der Nabla-Operator in Spaltenvektordarstellung auf die Funktion u wirkt:

$$\boxed{\text{grad-Def}} \tag{6.12}$$

$$\forall \vec{x}: |\text{grad}\rangle = |\vec{\nabla}\rangle$$

6.5 Divergenz

Die Divergenz wird mit dem Nabla-Operator in Zeilenvektordarstellung definiert:

$$\boxed{\text{div-Def}} \tag{6.13}$$

$$\forall \vec{x}: \langle \text{div} | = \langle \vec{\nabla} |$$

Der Divergenzoperator wirkt auf einen Spaltenvektor als Operanden und liefert ein Skalar als Ergebnis.

6.6 Rotation

Die Rotation wird unter Verwendung der Kreuzproduktmatrixdarstellung definiert:

$$\boxed{\text{rot-Def}} \tag{6.14}$$

$$\forall \vec{x}: \underline{\text{rot}} = [\vec{\nabla} \times]$$

Der Rotationsoperator erwartet einen Spaltenvektor als Operand und hat als Ergebnis wieder einen Spaltenvektor.

6.7 Laplace–Operator

Der Laplace–Operator ergibt sich durch das Skalarprodukt des Nabla–Operators mit sich selbst:

$$\boxed{\text{Laplace-Def}} \tag{6.15}$$

$$\forall \vec{x}: \Delta = \langle \vec{\nabla} | \vec{\nabla} \rangle$$

6.8 Hesse–Matrix

Die Hesse–Matrix als Operator entsteht, indem der Nabla–Operator ein dyadisches Produkt mit sich selbst bildet:

$$\boxed{\text{Hesse-Matrix-Def}} \tag{6.16}$$

$$\forall \vec{x}: \underline{\mathcal{H}} = |\vec{\nabla}\rangle\langle\vec{\nabla}|$$

6.9 Jacobi–Matrix

Die Jacobi–Matrix als Operator bezüglich eines Vektorobjektes \vec{a} ist das transponierte Dyadenprodukt aus dem Gradientenoperator mit dem Vektorobjekt \vec{a} in Zeilenvektordarstellung:

$$\boxed{\text{Jacobi-Matrix-Def}} \tag{6.17}$$

$$\forall \vec{a}: \forall \vec{x}: \underline{\mathcal{J}}_{\vec{a}} = (|\vec{\nabla}\rangle\langle\vec{a}|)^T$$

6.10 Antidivergenz

Es wird ein Spaltenvektoroperator definiert, der Stammfunktionsoperatoren nach (6.7) in jeder Komponente enthält und somit dem Divergenzoperator entgegenwirkt. Hierbei wird der formale Vektor \vec{s} eingeführt, dessen Komponenten die drei Anfangsbedingungen enthalten:

$$\boxed{\text{Anti-div-Def}} \tag{6.18}$$

$$\forall \vec{s} : \forall \vec{x} : \left((\forall \check{n} : s_{\check{n}} \in \mathbb{R} (s_{\check{n}})_u) \implies |\vec{\mathcal{F}}, \vec{s}\rangle = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{s_1}(x_1) \\ \mathcal{F}_{s_2}(x_2) \\ \mathcal{F}_{s_3}(x_3) \end{pmatrix} \right)$$

6.11 Antigradient

Es wird ein Zeilenvektoroperator definiert, der Stammfunktionsoperatoren nach (6.7) in jeder Komponente enthält und somit dem Gradientenoperator entgegenwirkt. Die drei Anfangsbedingungen sind wieder die Komponenten des formalen Vektors \vec{s} :

$$\boxed{\text{Anti-grad-Def}} \tag{6.19}$$

$$\forall \vec{s} : \forall \vec{x} : \left((\forall \check{n} : s_{\check{n}} \in \mathbb{R} (s_{\check{n}})_u) \implies \langle \vec{\mathcal{F}}, \vec{s} | = (\mathcal{F}_{s_1}(x_1), \mathcal{F}_{s_2}(x_2), \mathcal{F}_{s_3}(x_3)) \right)$$

6.12 Doppeltes Kreuzprodukt

Es seien \hat{a} und \hat{b} zwei beliebige Vektoren mit Komponenten, die im allgemeinen Komponenten nicht kommutativ sind. Unter Benutzung der Kreuzproduktmatrizen ergibt sich in einem doppelten Kreuzprodukt:

$$(1) \quad \forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \quad [\hat{a} \times] [\hat{b} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{a}_3 & \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 & 0 & -\hat{a}_1 \\ -\hat{a}_2 & \hat{a}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\hat{b}_3 & \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 & 0 & -\hat{b}_1 \\ -\hat{b}_2 & \hat{b}_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Vektorproduktmatrix (5.37)}$$

$$(2) \quad \forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \quad [\hat{a} \times] [\hat{b} \times] = \begin{pmatrix} -\hat{a}_3 \hat{b}_3 - \hat{a}_2 \hat{b}_2 & \hat{a}_2 \hat{b}_1 & \hat{a}_3 \hat{b}_1 \\ \hat{a}_1 \hat{b}_2 & -\hat{a}_3 \hat{b}_3 - \hat{a}_1 \hat{b}_1 & \hat{a}_3 \hat{b}_2 \\ \hat{a}_1 \hat{b}_3 & \hat{a}_2 \hat{b}_3 & -\hat{a}_2 \hat{b}_2 - \hat{a}_1 \hat{b}_1 \end{pmatrix} \quad \text{Matrizenprodukt (5.31)}$$

Durch Vergleich mit dem dyadischen Produkt und dem Skalarprodukt erkennen wir den folgenden Zusammenhang:

$$\boxed{\text{xx-S}} \quad (6.20)$$

$$\forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \quad [\hat{a} \times] [\hat{b} \times] = \left(|\hat{a}\rangle \langle \hat{b}| \right)^T - \left[\langle \hat{a} | \hat{b} \rangle \right]$$

Für Ortsableitungen nach verschiedenen Variablen können wir diese Beziehung auch auf die doppelte Anwendung der Rotationsmatrix wie folgt übertragen und die Kommutativität der zweifachen gemischten Ableitungen ausnutzen, da die Variablen x_1, x_2, x_3 des Ortsvektors \vec{x} voneinander unabhängig sind:

$$\boxed{\text{rotrot-S}} \quad (6.21)$$

$$\forall \vec{x} : \quad \underline{\text{rot}} \underline{\text{rot}} = |\vec{\nabla}\rangle \langle \vec{\nabla}| - [\Delta]$$

Falls die Komponenten der drei Vektoren $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ paarweise kommutativ sind, dann folgt der sogenannte Entwicklungssatz (bac–cab–Formel):

$$\boxed{\text{bac-cab-Ph}} \quad (6.22)$$

$$(1.1) \quad \forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \hat{a}_{\hat{n}(1)} \hat{b}_{\hat{n}(2)} = \hat{b}_{\hat{n}(2)} \hat{a}_{\hat{n}(1)} \quad \text{Voraussetzung 1.1}$$

$$(1.2) \quad \forall \hat{b} : \forall \hat{c} : \hat{b}_{\hat{n}(1)} \hat{c}_{\hat{n}(2)} = \hat{c}_{\hat{n}(2)} \hat{b}_{\hat{n}(1)} \quad \text{Voraussetzung 1.2}$$

$$(1.3) \quad \forall \hat{a} : \forall \hat{c} : \hat{c}_{\hat{n}(1)} \hat{a}_{\hat{n}(2)} = \hat{a}_{\hat{n}(2)} \hat{c}_{\hat{n}(1)} \quad \text{Voraussetzung 1.3}$$

$$(1.100) \quad \forall \hat{a} : \forall \hat{b} : \forall \hat{c} : \left[\hat{a} \times \right] \left[\hat{b} \times \right] | \hat{c} \rangle = |\hat{b}\rangle \langle \hat{a} | \hat{c} \rangle - |\hat{c}\rangle \langle \hat{a} | \hat{b} \rangle \quad \text{Satz (6.20) und} \\ \text{Voraussetzungen 1.1, 1.2, 1.3}$$

Für drei beliebige Vektorobjekte erhalten wir in der obersten logischen Ebene diese Aussage, da alle Komponenten von Objekten nach den Objektaxiomen (4.8) Zeile 6 jeweils paarweise kommutativ sind:

$$\boxed{\text{bac-cab-S}} \quad (6.23)$$

$$\forall \vec{a}_S : \forall \vec{b}_S : \forall \vec{c}_S : \left[\vec{a}_S \times \right] \left[\vec{b}_S \times \right] | \vec{c}_S \rangle = |\vec{b}_S\rangle \langle \vec{a}_S | \vec{c}_S \rangle - |\vec{c}_S\rangle \langle \vec{a}_S | \vec{b}_S \rangle$$

6.13 Nabla in Kugelkoordinaten?

Nach der herkömmlichen Definition hätte der Nabla–Operator in Kugelkoordinaten die folgende Darstellung:

$$\text{grad} = \vec{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta \partial_\vartheta + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi$$

Der zweite und der dritte Term können aber Polstellen bei $r = 0$ und bei $\vartheta = 0$ erzeugen. Es können also Terme erzeugt werden, die nicht differentiell superkontinuierlich sind und infolgedessen der Axiomenkette (3.15), (3.16), (3.17), (4.1) widersprechen. Es muss daher innerhalb dieses Axiomensystems auf diese Form der Nabla–Darstellung in Kugelkoordinaten verzichtet werden!

6.14 Konstantenmengen

In physikalischen Ableitungen werden oft lange Listen von reellen Konstanten als Voraussetzungen benötigt. Um dies abzukürzen, definieren wir Mengen von Konstanten für die verschiedenen Strukturen:

$$\boxed{\text{K-Menge-Def}} \tag{6.24}$$

$$\mathbb{K} = \{ \forall x : x \in \mathbb{R} \wedge \forall x : \{|\text{grad}\rangle x\} = |\vec{0}\rangle \}$$

Häufig werden auch Konstanten benötigt, die größer als Null sind:

$$\boxed{\text{KPlus-Menge-Def}} \tag{6.25}$$

$$\mathbb{K}^+ = \{ \forall x : x \in \mathbb{R} \wedge \forall x : x > 0 \wedge \forall x : \{|\text{grad}\rangle x\} = |\vec{0}\rangle \}$$

Die nachfolgenden Axiome definieren verschiedene Konstantenstrukturen in Form von Skalaren, Vektoren und Matrizen:

$$\boxed{\text{Konstantenstrukturen}} \tag{6.26}$$

- | | | |
|-----|--|-------------------------|
| (1) | $\mathbb{K}^{1,1} = \{ \forall x : x \in \mathbb{K} \}$ | Skalarkonstanten |
| (2) | $\mathbb{K}^{1,3} = \{ \forall (x_1, x_2, x_3) : \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{K} \}$ | Zeilenvektorkonstanten |
| (3) | $\mathbb{K}^{3,1} = \left\{ \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{K} \right\}$ | Spaltenvektorkonstanten |
| (4) | $\mathbb{K}^{3,3} = \left\{ \forall \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix} : \{x_{1,1}, \dots, x_{3,3}\} \subset \mathbb{K} \right\}$ | Matrixkonstanten |

Per Definition gilt die folgende Äquivalenz der Mengenzugehörigkeit von Zeilenvektor- und Spaltenvektorkonstanten:

Konstantvektor-Äquivalenz-Def

(6.27)

$$(1) \quad (\forall \vec{a} : |\vec{a}\rangle \in \mathbb{K}^{3,1}) \iff (\forall \vec{a} : \langle \vec{a}| \in \mathbb{K}^{1,3})$$

$$(2) \quad (\forall \vec{a} : |\vec{a}\rangle \in \mathbb{K}^{3,1}) \iff (\forall \vec{a} : [\vec{a}\times] \in \mathbb{K}^{3,3})$$

Index

- abstrakte Einheiten 37
- Antisymmetrie 70
- Antikommutativität 72
- Antidivergenz 92
- Antigradient 92
- Aussageform von Mengen 19

- Basiszerlegung von Vektorproduktmatrizen 78
- Beschränkte Funktionen 45
- bestimmtes Integral 86
- Betragsquadrat 62
- Beweisführung 11

- Definitionsbereiche 43
- Diagonalskalarmatrix 69
- Differentialableitungsoperatoren 83
- differentiell superkontinuierlich 5
- Dirac–Vektoren 55
- Divergenz 90
- doppeltes Kreuzprodukt 93
- Drehmatrizen 80
- dreidimensionaler Raum 6
- dyadisches Produkt 60

- Einheitsmatrix 64
- Einheitsteilmatrix 65
- Einheitsvektoren 58
- Einheitsvektorkreuzproduktmatrizen 75
- Einkomponentenmatrix 66
- Elementsymbol 22
- Entwicklungssatz („*bac–cab–Formel*“) 94

- Fläche 86
- Folgen 34
- Funktionen 9, 33, 41
- Funktionsbegriff 5

- globales Integral 87
- Gradient 90

- Hesse–Matrix 91
- Hybridsymbole 54

- imaginäre Einheit 35
- Indizes 37
- Induktion 26
- inneres Produkt 60
- Integraloperatoren 86

- Jacobi–Matrix 91

- Komponentenindizes 38
- Konstanten 32
- Konstantenmengen 95
- Konstellationen (konkret) 74
- Kreuzprodukt 70
- Kronecker–Delta 64
- Kugelkoordinaten 94

- Längen 40
- Längeneinheit 37
- Laplace 91
- logische Grundfunktionen 7
- lokales Integral 86

- Matrixkomponente 66
- Matrixkomponenten 66
- Matrixspaltenvektoren 67
- Matrixzeilenvektoren 67
- Matrix–Vektor–Produkte 68
- Matrizen 63
- Matrizenaddition 66
- Matrizendimensionen 38
- Matrizenmultiplikation 68
- Mengen 19
 - Aussageform 19
 - Definitionsschema 21
 - differentiell superkontinuierliche Funktionen 41
- Mengendefinitinsschema 21
- Mengenelemente 22
- Mengensymbole 18

- Nabla–Operator 89
- nackte Symbole 18

- Objektaxiome 51
- Objekte 43
 - Operatoren und Objekte 47
- örtliche Steigung 84
- Operatoren 44
 - Operatoren und Objekte 47
- Operatoraxiome 52
- Ortsentwicklungsoperator 86
- Ortsvektor 59

- Parameterregeln 59
- Produkt einer Menge mit einer Einheit 39

Quantoren 9
Quantorenlogik 9
 Funktionen und Quantoren 33
 Induktion 26
 Konstanten und Quantoren 32

Rotation 90

Skalarfelder 41
skalierte Kreuzproduktmatrizen und Vektoren 75
Skalarmultiplikation mit Matrizen 69
Skalarmultiplikation mit Vektoren 73
Skalarobjekte 42
Skalaroperatoren 42
Skalarprodukt 60
Spaltenindex 38
Spaltenvektoren 56
Spaltenvektoren einer Matrix 67
Spur einer Matrix 72
Stammfunktion 87
Steigungsfunktion 83
Symbole 35

Taylorentwicklungsoperator 85
Theoria Numerorum Typographica 10
TNT 10
typenlose Vektoren 55

Vektoraddition 57
Vektortypen 55
Vektoren in Aufzählungslisten 58
Vektorketten 61
Vektorkomponenten 63
Vektorprodukt 70
Vektorproduktmatrizen–Basiszerlegung 78

Wertebereiche 43
Wirkungsbereiche von Operatoren 47
Wirkungsrichtung von Operatoren 47

Zeilenindex 38
Zeilenvektoren 56
Zeilenvektoren einer Matrix 67
Zeiteinheit 37
Zeiten 40
Zeitentwicklungsoperator 85
zyklische Indizes 38